

# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

## INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 33

Januar/Februar

Heft 1/2

### Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene

Von A.-W. Maue in Freiburg i. Br.

*Das vorliegende Beugungsproblem wird zweidimensional behandelt. Der durch Überlagerung ebener Wellen gewonnene Lösungsansatz führt auf ein System linearer Integralgleichungen. Dieses reduziert sich nach Cle m m o w auf die Aufgabe, eine komplexe Funktion so in zwei Faktoren zu spalten, daß jeder Faktor einen vorgeschriebenen Anteil ihrer singulären Stellen enthält. Die Aufspaltung läßt sich mit Hilfe des Ca u c h y schen Satzes durchführen.*

*The presented diffraction problem is treated two-dimensionally. The proposed solution that is gained by superposition of plane waves leads to a system of linear integral equations. The problem can be reduced, as was shown by Cle m m o w, to the task of splitting a complex function in two factors in such a way, that each factor contains a prescribed portion of singular points. The splitting is carried out by aid of Ca u c h y s integral formula.*

*Le problème de diffraction en question est traité pour deux dimensions. L'arrangement de solution gagné par superposition d'ondes planes conduit à un système d'équations intégrales linéaires. Cela se réduit selon Cle m m o w au problème de fendre une fonction complexe en deux facteurs, de manière que chaque facteur contient une part prescrite des points singuliers de la fonction. La fonction peut être fendue à l'aide du théorème de Ca u c h y.*

Предлагаемая дифракционная проблема рассматривается в двумерной трактовке. Теорема решения, полученная посредством суперпозиции плоских волн, приводит к системе линейных интегральных уравнений. Задача сводится, по Клеммову (Clemmow), к такому разбиению комплексной функции на два множителя, что каждый множитель содержал бы заданную долю ее особых мест. Разбиение проводится при помощи теоремы Коши.

Die zunehmende Bedeutung des Ultraschalls in Physik und Technik, sowie die Verwendung kinematographischer Methoden<sup>1)</sup> zur Beobachtung elastischer Wellen, lassen es wünschenswert erscheinen, die Dynamik der elastischen Medien genauer zu studieren, als das bisher geschehen ist.

Das einfachste, seit langem behandelte, dynamische Problem der Elastizitätstheorie ist die Reflexion elastischer Wellen an einer freien Oberfläche<sup>2)</sup>. Im Gegensatz zum Reflexionsvorgang der Optik treten dabei im allgemeinen z w e i reflektierte Wellen, eine longitudinale (Reflexionswinkel  $\alpha$ ) und eine transversale (Reflexionswinkel  $\beta$ ) auf, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  durch das

Brechungsgesetz  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$  verknüpft sind ( $a$  = longitudinale,  $b$  = transversale Schall-

geschwindigkeit). Nächstes naheliegendes Ziel wird die Behandlung eines Beugungsproblems sein. Wir wählen als einfachstes Problem dieser Art die Beugung an der Halbebene: Ein unendlich ausgedehntes elastisches Medium sei längs einer Halbebene aufgeschnitten; zu untersuchen ist die Ausbreitung einer aus dem Unendlichen einfallenden ebenen Welle<sup>3)</sup>. Dabei wollen wir uns auf die Betrachtung des zweidimensionalen Problems beschränken und annehmen, daß die Welle in einer zur Kante der Halbebene senkrechten Richtung einfällt.

Die Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Halbebene ist bekanntlich von S o m m e r f e l d<sup>4)</sup> in Strenge gelöst worden. S o m m e r f e l d benutzt dabei zweideutige, längs der beugenden Kante verzweigte Lösungen der Wellengleichung und erfüllt die Randbedingung auf der Halbebene nach dem Spiegelungsprinzip. Es liegt zunächst nahe zu versuchen, diese Methode auf den elastischen Fall zu übertragen. Dabei stößt man jedoch auf Schwierigkeiten, die damit zusammenhängen, daß am beugenden Schirm nicht wie im optischen Falle (bei geeignet gewählter Polarisierung der einfallenden Welle) nur eine, sondern zwei Randbedingungen (Verschwinden von Normal- und Schubspannung) erfüllt sein müssen.

<sup>1)</sup> H. Scharadin, D. Elle und W. Struth, Z. techn. Physik 21 (1940), S. 203; H. Scharadin, Glastechn. Ber. 23, (1950), S. 1, 67 u. 325.

<sup>2)</sup> Lord Kelvin, Phil. Mag. 26 (1890), S. 422; P. Drude, Ann. d. Phys. 41 (1890), S. 759; A. Schoch, Ergebn. d. ex. Natw. 23 (1950), S. 144; F. Sauter, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 94.

<sup>3)</sup> Anm. bei der Korrektur: Das entsprechende Problem für eine einfallende Stoßwelle mit Stufenprofil wurde von M. M. Fridman, Vorträge der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 60 (1948), S. 1145, behandelt, worauf mich Herr Schoch liebenswürdigerweise hinwies. Die dabei verwendete Randbedingung ist die der festgehaltenen Oberfläche.

<sup>4)</sup> A. S o m m e r f e l d, Math. Ann. 47 (1896), S. 317; in Frank-v. Mises, Differential- u. Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl., Braunschweig, 1934 Bd. II, Kap. 20; A. Sommerfeld, Vorlesungen über theor. Physik, Bd. IV, Optik, § 38, Wiesbaden 1950.



Das Spiegelungsprinzip versagt daher im elastischen Falle. Im folgenden soll ein anderer Weg eingeschlagen werden. Der dabei gewonnene Ausdruck für die gebeugte Welle entspricht insofern dem bei Sommerfeld als die Welle wie dort formal durch Überlagerung ebener Wellen dargestellt wird.

In den letzten Jahren sind eine ganze Reihe von Arbeiten erschienen, in denen Beugungsprobleme mit Hilfe von Integralgleichungen formuliert und gelöst werden. Es handelt sich dabei im wesentlichen um zwei mögliche Wege. Die eine Methode<sup>5)</sup> geht aus vom Huygensschen Prinzip und benutzt als unbekannte Funktion eine Belegung des Beugungsschirms. Im elektromagnetischen Falle beispielsweise stellt die Belegung den elektrischen Flächenstrom im Schirm dar. Als Kern der Integralgleichung tritt die Green'sche Funktion des unendlichen Raumes  $\frac{e^{ikr}}{r}$  auf. Die zweite Methode<sup>6)</sup> ist von Clemmow und von Hönl entwickelt worden und

stellt die gesuchte Lösung des Beugungsproblems durch Überlagerung ebener Wellen dar, die sich in allen möglichen Richtungen ausbreiten. Unbekannte Funktion ist die spektrale Amplitudenverteilung innerhalb des betrachteten Richtungsspektrums. Diese zweite Methode hat verschiedene Vorteile gegenüber der ersten, weshalb sie im folgenden angewandt werden soll. Einmal ist die Lösung der Integralgleichung leichter durchführbar; zum anderen liefert die Amplitudenfunktion ohne weiteres die angulare Intensitätsverteilung in weitem Abstand vom Beugungsobjekt.

Da es uns bei den vorliegenden Untersuchungen in erster Linie darauf ankommt, die allgemeinen Verhältnisse und grundsätzlichen Schwierigkeiten kennenzulernen, mit denen in der Beugungstheorie elastischer Wellen zu rechnen ist, begnügen wir uns damit, die Rechnung so weit zu führen, bis das Problem im Prinzip gelöst ist. Auf eine numerische Auswertung haben wir zunächst verzichtet, da die hierzu notwendige Rechenarbeit erst dann lohnend erschiene, wenn die Möglichkeit eines Vergleiches zwischen Beobachtung und Theorie gegeben wäre.

### § 1. Die Randwertaufgabe

1. Differentialgleichungen. Wir betrachten Schwingungen des elastischen Kontinuums mit der Frequenz  $\omega$ . Es sei  $a$  die longitudinale und  $b$  die transversale Schallgeschwindigkeit. Dann sind die Wellenzahlen der beiden Wellentypen

$$k = \frac{\omega}{a}, \quad K = \frac{\omega}{b} \quad \dots \dots \dots (1).$$

Die zugehörigen Wellengleichungen für die Verschiebungen  $\mathfrak{s}_1$  und  $\mathfrak{s}_2$  der longitudinalen und transversalen Wellen lauten

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathfrak{s}_1 + k^2 \mathfrak{s}_1 &= 0, & \text{rot } \mathfrak{s}_1 &= 0 \\ \Delta \mathfrak{s}_2 + K^2 \mathfrak{s}_2 &= 0, & \text{div } \mathfrak{s}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

oder nach Einführung eines skalaren Potentials  $\Phi$  und eines Vektorpotentials  $\vec{\Psi}$  und Zusammenfassung der beiden Bestandteile

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 &= -\text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi} \\ \Delta \Phi + k^2 \Phi &= 0, \quad \Delta \vec{\Psi} + K^2 \vec{\Psi} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Dabei ist über die bei der Einführung der Potentiale bestehenden Freiheiten schon teilweise verfügt. Aus (3) entnimmt man, sofern man noch  $\text{div } \vec{\Psi} = 0$  festsetzt, daß  $\Phi$  und  $\vec{\Psi}$  bis auf konstante Faktoren die kubische Dehnung und die lokale Drehung angeben:

$$\text{div } \mathfrak{s} = k^2 \Phi, \quad \text{rot } \mathfrak{s} = K^2 \vec{\Psi} \quad \dots \dots \dots (4),$$

also einen einfachen physikalischen Sinn haben.

2. Randbedingungen. Die Verschiebung erfolge in der  $x$ - $y$ -Ebene. Dann hat  $\vec{\Psi}$  die  $z$ -Richtung und kann als skalar betrachtet werden. (3) lautet in Komponenten geschrieben

$$\xi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (5).$$

<sup>5)</sup> G. Jaffé, Phys. Z. 22 (1921), S. 578; H. A. Bethe, Phys. Rev. 66 (1944), S. 163; E. T. Copson, Proc. Roy. Soc. A 186 (1946), S. 100; Quart. J. Math. 17 (1946), S. 19; H. Levine und J. Schwinger, Phys. Rev. 74 (1948), S. 958; 75 (1949), S. 1423; A. Sommerfeld, Vorlesungen (l.c.) Bd. IV, § 39; A.-W. Maue, Z. Physik 126 (1949), S. 601; Cl. Müller, Abh. dtsch. Akad. Berlin 45/46, Nr. 3; Math. Ann. 123 (1951), S. 345. Weitere Literatur bei Clemmow<sup>6)</sup>.

<sup>6)</sup> P. C. Clemmow, Proc. Roy. Soc. A. 205 (1951), S. 286; H. Hönl, Z. Physik 131 (1952), S. 290; E. Groschwitz u. H. Hönl, Z. Physik 131 (1952), S. 305.

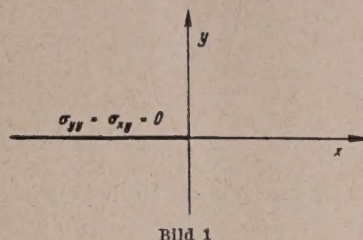


Bild 1 zeigt die längs der negativen  $x$ -Achse aufgeschnittene  $x$ - $y$ -Ebene. Als Randbedingung haben wir beiderseits des Schnittes das Verschwinden von Normal- und Schubspannung zu fordern:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0, \quad x < 0 \dots (6).$$

Die Spannungen ergeben sich aus der Spannungsdehnungsbeziehung, die bei der Dichte  $\varrho$  und Verwendung von  $a$  und  $b$  als elastischen Materialkonstanten liefert:

$$\sigma_{yy} = \varrho \left[ (a^2 - 2b^2) \frac{\partial \xi}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right], \quad \sigma_{xy} = \varrho b^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (7).$$



Führen wir hier mittels (5) die Potentiale ein und formen mit Rücksicht auf (1) und (3) um, so geht (6) über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}}{2\varrho b^2} = \Sigma_{yy} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Phi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \\ -\frac{\sigma_{xy}}{2\varrho b^2} = \Sigma_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Psi = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für} \quad y = 0, \quad x < 0 \dots (8).$$

Zu diesen Randbedingungen tritt die sogenannte Kantenbedingung<sup>7)</sup>, die das Verhalten der Welle in der Umgebung der Kante betrifft. Sie sorgt dafür, daß an der Kante keine Kräfte auf das elastische Kontinuum ausgeübt werden, und läßt für die kubische Dehnung und lokale Drehung und wegen (4) auch für die Potentiale ein Unendlichwerden an der Kante ( $r$  = Abstand von der Kante) wie

$$\Phi, \Psi \sim r^{-1/2} \quad \text{für} \quad r \rightarrow 0 \dots (9)$$

zu<sup>8)</sup>.

Ferner ist die Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen zu erfüllen.

## § 2. Die Integralgleichungen

1. Lösungssatz. Wir setzen die Potentiale der gesuchten Welle aus mehreren Bestandteilen zusammen:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2, \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 \dots (10).$$

Hierbei beschreibe  $\Phi_0, \Psi_0$  die durch den Beugungsschirm unbeeinflusste einfallende Welle. Die restlichen Glieder beschreiben den Einfluß des Schirms, also Reflexion, Schattenwirkung und Beugungserscheinungen. Die Aufspaltung in die beiden Bestandteile mit den Indizes 1 und 2 erfolge dabei so, daß der erste bezüglich einer Spiegelung an der  $x$ -Achse symmetrisch, der zweite antisymmetrisch ist. Für die Potentiale gilt dann, wenn man beachtet, daß die zu  $\Psi$  proportionale lokale Drehung im symmetrischen Falle antisymmetrisch ist und umgekehrt,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, -y) &= \Phi_1(x, y), & \Psi_1(x, -y) &= -\Psi_1(x, y) \\ \Phi_2(x, -y) &= -\Phi_2(x, y), & \Psi_2(x, -y) &= \Psi_2(x, y) \end{aligned} \right\} \dots (11).$$

Erfüllen wir jetzt die Randbedingungen (8) auf der oberen Seite des Schirms, indem wir dort verlangen

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{yy}^{(1)} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Phi_1 - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Phi_0 + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial y} = - \Sigma_{yy}^{(0)} & (a) \\ \Sigma_{yy}^{(2)} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Phi_2 - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y} = 0 & (b) \\ \Sigma_{xy}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Psi_1 = 0 & (c) \\ \Sigma_{xy}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Psi_2 = - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{K^2}{2} \right) \Psi_0 = - \Sigma_{xy}^{(0)} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

so sind diese Bedingungen auf der unteren Seite des Schirms wegen der Symmetrieverhältnisse (11) von selbst erfüllt. Wir dürfen uns daher darauf beschränken, die Funktionen  $\Phi_i, \Psi_i (i = 1, 2)$  in der oberen Halbebene  $y > 0$  zu untersuchen. Es ist dann noch erforderlich, die Stetigkeit

<sup>7)</sup> Für den Fall skalarer und elektromagnetischer Wellen vgl. J. Meixner, Z. Naturforschg. 3a (1948), S. 506; Ann. d. Phys. (6) 6 (1949), S. 2; A.-W. Maue (l. o.) § 3.

<sup>8)</sup> Vgl. hierzu A.-W. Maue, Z. Naturforschg. 7a (1952), S. 387, Gl. (17).



der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen längs der positiven  $x$ -Achse zu gewährleisten und zusätzlich zu (11) zu fordern

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0, \quad \Psi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \text{für } y = 0, \quad x > 0 \quad \dots \quad (13).$$

In der oberen Halbebene setzen wir die Potentiale als Überlagerung ebener Wellen an, die die Wellengleichungen (3) erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1,2} &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{1,2}(\lambda) e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} y)} d\lambda \\ \Psi_{1,2} &= \int_{-\infty}^{\infty} Q_{1,2}(\lambda) e^{i(\lambda x + \sqrt{K^2 - \lambda^2} y)} d\lambda \end{aligned} \right\} \text{für } y > 0 \quad \dots \quad (14).$$

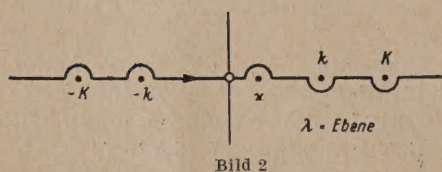


Bild 2

Das positive Vorzeichen vor der Wurzel sichert dabei für  $|\lambda| < k, K$  den Ausstrahlungscharakter der Wellen (Zeitabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$ ). Für  $|\lambda| > k, K$  ist die Wurzel positiv imaginär zu wählen, entsprechend einem exponentiellen Abfall der Wellen nach positiven  $y$  hin (Oberflächenwellen). Diese Vorzeichenwahl erfordert, daß der Integrationsweg in der in Bild 2

dargestellten Weise um die Verzweigungspunkte  $\lambda = \pm k, \pm K$  herumgeführt wird.

Bildung der Ausdrücke (12) für  $y = 0$  ergibt

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{yy}^{(1,2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right) P_{1,2}(\lambda) + \lambda \sqrt{K^2 - \lambda^2} Q_{1,2}(\lambda) \right\} e^{i\lambda x} d\lambda \\ \Sigma_{xy}^{(1,2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\lambda \sqrt{k^2 - \lambda^2} P_{1,2}(\lambda) + \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right) Q_{1,2}(\lambda) \right\} e^{i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots \quad (15).$$

Hiervon müssen  $\Sigma_{yy}^{(2)}$  und  $\Sigma_{xy}^{(1)}$  für beliebige Werte von  $x$  verschwinden und zwar für  $x < 0$  wegen (12b, c) und für  $x > 0$  wegen (13). Daraus folgt das Verschwinden der entsprechenden beiden Fourierkoeffizienten, d. h. der geschweiften Klammern, in (15). Dem tragen wir Rechnung, indem wir unter Einführung zweier neuer Funktionen  $R_{1,2}(\lambda)$  ansetzen

$$\left. \begin{aligned} P_1(\lambda) &= \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right) R_1(\lambda), \quad Q_1(\lambda) = \lambda \sqrt{k^2 - \lambda^2} R_1(\lambda), \\ P_2(\lambda) &= -\lambda \sqrt{K^2 - \lambda^2} R_2(\lambda), \quad Q_2(\lambda) = \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right) R_2(\lambda) \end{aligned} \right\} \dots \quad (16).$$

2. Integralgleichungen. Aus (12a, d), (15) und (16) folgt die erste Integralgleichung für  $R_{1,2}(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right)^2 + \lambda^2 \sqrt{k^2 - \lambda^2} (K^2 - \lambda^2) \right\} R_{1,2}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = - \left\{ \begin{aligned} \Sigma_{yy}^{(0)}|_{y=0} \\ \Sigma_{xy}^{(0)}|_{y=0} \end{aligned} \right\} \text{für } x < 0 \quad (17).$$

Als zweite Integralgleichung fordern wir

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \lambda^2} R_1(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{K^2 - \lambda^2} R_2(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } x > 0 \quad \dots \quad (18).$$

und erfüllen damit die durch Einsetzen von (14) und (16) in (13) entstehenden Bedingungen. Um das einzusehen, hat man neben (18) deren erste und zweite Abteilung nach  $x$  zu verwenden.



Die Lösung des Beugungsproblems läßt sich nach (10), (14) und (16) mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse (11) für die ganze  $x$ - $y$ -Ebene in der Form schreiben

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right) R_1(\lambda) \mp \lambda \sqrt{K^2 - \lambda^2} R_2(\lambda) \right\} e^{i(\lambda x + \sqrt{K^2 - \lambda^2} |y|)} d\lambda, \\ \Psi &= \Psi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \pm \lambda \sqrt{K^2 - \lambda^2} R_1(\lambda) + \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right) R_2(\lambda) \right\} e^{i(\lambda x + \sqrt{K^2 - \lambda^2} |y|)} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

wobei sich das doppelte Vorzeichen auf die beiden Halbebenen  $y > 0$  und  $y < 0$  bezieht.

Wir spezialisieren nun die einfallende Welle. Der Einfall erfolge schräg von unten. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

I. Einfallende Druckwelle.

$$\Phi_0 = e^{i(\kappa x + \sqrt{k^2 - \kappa^2} y)}, \quad \Psi_0 = 0 \quad -k < \kappa < k \dots (20a).$$

II. Einfallende Schubwelle.

$$\Phi_0 = 0, \quad \Psi_0 = e^{i(\kappa x + \sqrt{K^2 - \kappa^2} y)} \quad -K < \kappa < K \dots (20b).$$

Hiermit ergibt sich für die rechte Seite von (17) nach (12a, d)

$$-\sum_{yy}^{(0)} \Big|_{y=0} = A_1 e^{i\kappa x}, \quad -\sum_{xy}^{(0)} \Big|_{y=0} = A_2 e^{i\kappa x} \dots (21),$$

wobei

$$\text{I.} \quad A_1 = -\left( \frac{K^2}{2} - \kappa^2 \right), \quad A_2 = \kappa \sqrt{k^2 - \kappa^2} \dots (22a).$$

$$\text{II.} \quad A_1 = -\kappa \sqrt{K^2 - \kappa^2}, \quad A_2 = -\left( \frac{K^2}{2} - \kappa^2 \right) \dots (22b).$$

Die Integralgleichung (17) lautet dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)} \right\} R_{1,2}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = A_{1,2} e^{i\kappa x} \quad \text{für } x < 0 \quad (23).$$

### § 3. Lösung der Integralgleichungen

1. Lösungsverfahren. Die beiden Integralgleichungen für  $R_{1,2}(\lambda)$  sind (18) und (23). Wir lösen sie nach dem Vorbilde von Clemmow<sup>6)</sup> mit Hilfe des Cauchy'schen Satzes und betrachten zunächst  $R_1$ . Es seien  $U_I(\lambda)$  und  $U_{II}(\lambda)$  zwei Funktionen mit algebraischem Verhalten im Unendlichen der komplexen  $\lambda$ -Ebene (vgl. hierzu Ziffer 2 dieses §), von denen die erste in der positiv-imaginären, die zweite in der negativ-imaginären  $\lambda$ -Ebene regulär sei. Die Begrenzung der beiden komplexen Halbebenen verlaufe dabei längs des Integrationsweges von Bild 2, wobei neu festgesetzt werde, daß der Punkt  $\lambda = \kappa$  oben umlaufen wird. Setzen wir nunmehr

$$\sqrt{k^2 - \lambda^2} R_1(\lambda) = U_I(\lambda) \dots (24a)$$

$$\left\{ \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)} \right\} R_1(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\lambda - \kappa} \cdot \frac{U_{II}(\lambda)}{U_{II}(\kappa)} \cdot A_1 \dots (24b)$$

und verlangen  $U_{II}(\kappa) \neq 0$ , so löst der Ansatz (24) beide Integralgleichungen. Der Integrationsweg in (18) läßt sich nämlich wegen der vorausgesetzten Eigenschaften von  $U_I(\lambda)$  ins Unendliche der positiv-imaginären  $\lambda$ -Ebene verschieben, wo das Integral wegen des Verhaltens der Exponentialfunktion  $e^{i\lambda x}$  und  $x > 0$  verschwindet. Entsprechend kann der Weg in (23) ins Unendliche der negativ-imaginären  $\lambda$ -Ebene verlegt werden, wobei der Pol  $\lambda = \kappa$  von (24b) die rechte Seite von (23) liefert.

Es ergibt sich nun die Aufgabe,  $U_I$  und  $U_{II}$  so zu bestimmen, daß (24a) und (24b) miteinander verträglich sind. Elimination von  $R_1(\lambda)$  führt zu

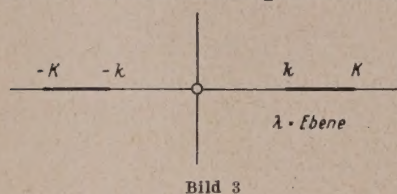
$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \cdot A_1 \cdot \frac{U_{II}(\lambda)}{U_{II}(\kappa) U_I(\lambda)} &= \frac{\lambda - \kappa}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \cdot \left\{ \left( \frac{K^2}{2} - \lambda^2 \right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)} \right\} \\ &= \frac{K^2 - k^2}{2} \cdot (\lambda - \kappa) \sqrt{K^2 - \lambda^2} \cdot F(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$



mit

$$F(\lambda) = \frac{2}{K^2 - k^2} \cdot \left\{ \lambda^2 + \frac{\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)^2}{\sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)}} \right\} \dots \dots \dots (26).$$

Die Abspaltung eines Faktors  $F(\lambda)$  erfolgte dabei so, daß in der gemäß Bild 3 von  $-K$  bis  $-k$  sowie von  $k$  bis  $K$  aufgeschnittenen  $\lambda$ -Ebene gilt



$$F(\lambda) \rightarrow 1 + \frac{\text{const.}}{\lambda^2} \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \quad \dots \dots (27),$$

wie jetzt zu zeigen ist. Hierzu stellen wir zunächst fest, daß  $F(\lambda)$  in der aufgeschnittenen Ebene eindeutig ist. Weiter gilt, wie wir erkennen, wenn wir  $\lambda$  beispielsweise längs der reellen  $\lambda$ -Achse anwachsen lassen,

$$\sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)} = -\sqrt{(\lambda^2 - k^2)(\lambda^2 - K^2)} \rightarrow -\lambda^2 + \frac{K^2 + k^2}{2} + \frac{\text{const.}}{\lambda^2} \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \quad (28),$$

woraus durch Entwicklung für große  $\lambda$  direkt (27) folgt.

Um  $U_I(\lambda)$  und  $U_{II}(\lambda)$  zu finden, muß (25) in zwei Faktoren zerlegt werden, von denen der eine in der oberen, der andere in der unteren  $\lambda$ -Ebene regulär ist. Für  $F(\lambda)$  sei eine solche Zerlegung

$$F(\lambda) = F_I(\lambda) \cdot F_{II}(\lambda) \quad \dots \dots \dots (29)$$

vorgenommen, wobei entsprechend (27) gelte

$$F_{I,II}(\lambda) \rightarrow 1 \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \quad \dots \dots \dots (30).$$

Dann folgt mit Rücksicht auf den Verlauf der Trennlinie zwischen oberer und unterer  $\lambda$ -Ebene gemäß Bild 2 und wegen  $U_{II}(\kappa) \neq 0$  unter Absehung von konstanten Faktoren

$$\frac{1}{U_I(\lambda)} \sim (\lambda - \kappa) \cdot \sqrt{K + \lambda} \cdot F_I(\lambda) \quad \dots \dots \dots (31a),$$

$$U_{II}(\lambda) \sim \sqrt{K - \lambda} \cdot F_{II}(\lambda) \quad \dots \dots \dots (31b).$$

Aus (24b) und (31b) können wir jetzt  $R_1(\lambda)$  direkt entnehmen. Ferner läßt sich  $R_2(\lambda)$  angeben, indem man  $A_1$  durch  $A_2$  ersetzt und in den Wurzeln  $k$  und  $K$  miteinander vertauscht. Man erhält

$$R_{1,2}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\lambda - \kappa} \left\{ \frac{\sqrt{K - \lambda}}{\sqrt{K - \kappa}} \cdot \frac{F_{II}(\lambda)}{F_{II}(\kappa)} \cdot \frac{A_{1,2}}{\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)}} \right\} \quad (32).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (19) ein und unterscheiden wieder die beiden Polarisationsfälle der einfallenden Welle, so ergibt sich für die vollständige Lösung des Beugungsproblems mit (20) und (22):

I. Beugung der Druckwelle.

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= e^{i(\kappa x + \sqrt{k^2 - \kappa^2} y)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{K - \lambda}{K - \kappa}} \cdot \frac{F_{II}(\lambda)}{F_{II}(\kappa)} \cdot e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} |y|)} \\ &\quad \times \frac{\left(\frac{K^2}{2} - \kappa^2\right) \left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right) \pm \kappa \lambda \sqrt{(k + \kappa)(k - \lambda)(K + \lambda)(K - \kappa)}}{\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)}} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda - \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{k - \lambda}{K - \kappa}} \cdot \frac{F_{II}(\lambda)}{F_{II}(\kappa)} \cdot e^{i(\lambda x + \sqrt{K^2 - \lambda^2} |y|)} \\ &\quad \mp \frac{\left(\frac{K^2}{2} - \kappa^2\right) \lambda \sqrt{k + \lambda} (K - \lambda) + \left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right) \kappa \sqrt{(k + \kappa)(K - \kappa)}}{\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)}} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda - \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (33b)$$



## II. Beugung der Schubwelle.

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{K-\lambda}{k-\kappa}} \cdot \frac{F_{II}(\lambda)}{F_{II}(\kappa)} \cdot e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} |y|)} \cdot \left. \begin{aligned} & \times \frac{\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right) \kappa \sqrt{(k-\kappa)(K+\kappa)} \mp \left(\frac{K^2}{2} - \kappa^2\right) \lambda \sqrt{(k-\lambda)(K+\lambda)}}{\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)}} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda - \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (33c)$$

$$\Psi = e^{i(\kappa x + \sqrt{K^2 - \kappa^2} |y|)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{k-\lambda}{k-\kappa}} \cdot \frac{F_{II}(\lambda)}{F_{II}(\kappa)} \cdot e^{i(\lambda x + \sqrt{K^2 - \lambda^2} |y|)} \cdot \left. \begin{aligned} & \times \frac{\pm \kappa \lambda \sqrt{(k+\lambda)(k-\kappa)(K+\kappa)(K-\lambda)} + \left(\frac{K^2}{2} - \kappa^2\right) \left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)}{\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)}} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda - \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (33d).$$

2. Konvergenz und Kantenbedingung. Zur Konvergenz der Integrale genügt es, daß der Faktor der Exponentialfunktion im Integranden für  $\lambda \rightarrow \infty$  gegen 0 geht, da dann die Exponentialfunktion für Konvergenz sorgt. Die Bedingung ist erfüllt, wie sogleich gezeigt wird.

Eine Ausnahmestellung nimmt in dieser Hinsicht der Punkt  $x = y = 0$  ein, und es bleibt zu untersuchen, wie sich die Welle in der Umgebung dieser Stelle verhält. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß wegen (28) gilt

$$\left(\frac{K^2}{2} - \lambda^2\right)^2 + \lambda^2 \sqrt{(k^2 - \lambda^2)(K^2 - \lambda^2)} \sim \lambda^2 \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \quad \dots \dots \dots (34)$$

und weiter wegen (30) ein Verhalten des Faktors der Exponentialfunktion in den Integranden von (33) wie  $\lambda^{-1/2}$ . Der Integrationsweg (vgl. Bild 2) wurde so um die Verzweigungspunkte herumgeführt, daß gilt

$$\sqrt{k^2 - \lambda^2} \rightarrow i|\lambda|, \quad \sqrt{K^2 - \lambda^2} \rightarrow i|\lambda| \quad \text{für } \lambda \rightarrow \pm \infty \quad \dots \dots \dots (35).$$

Für den gesamten Integranden ergibt sich somit das Verhalten  $\lambda^{-1/2} e^{i\lambda x - |\lambda||y|}$ . Hieraus folgt für die Integrale ein Verhalten wie  $r^{-1/2}$  in der Umgebung der Kante  $r = 0$  in Übereinstimmung mit der Forderung (9) für die Potentiale. Die Kantenbedingung ist also erfüllt<sup>9)</sup>.

### § 4. Das Aufspaltungsverfahren

Die Produktaufspaltung (29) führen wir durch, indem wir den Logarithmus von  $F(\lambda)$  in zwei Summanden zerlegen. Dementsprechend setzen wir

$$F(\lambda) = e^{f(\lambda)}, \quad F_{I, II}(\lambda) = e^{f_{I, II}(\lambda)}, \quad f(\lambda) = f_I(\lambda) + f_{II}(\lambda) \quad \dots \dots \dots (36).$$

Wir schreiben zunächst  $f(\lambda)$  mit Hilfe des C a u c h y'schen Satzes als Integral

$$f(\lambda) = \ln F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln F(z) \cdot \frac{dz}{z - \lambda} \quad \dots \dots \dots (37).$$

Der geschlossene Weg umschließt den Punkt  $z = \lambda$ . Der Integrand ist wegen (27) im Unendlichen regulär und kann daher auf die beiden Wege  $C_I$  und  $C_{II}$  (Bild 4) zusammengezogen werden, die gemeinsam sämtliche singulären Stellen von  $\ln F(z)$  umschließen sollen. Die gesuchte Zerlegung ergibt sich nunmehr von selbst:

$$f_{I, II}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{I, II}} \ln F(z) \cdot \frac{dz}{z - \lambda} \quad \dots \dots (38).$$

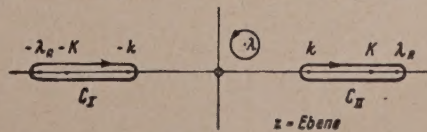


Bild 4

$f_I(\lambda)$  und  $F_I(\lambda)$  sind überall außerhalb des Weges  $C_I$ , insbesondere in den Punkten  $\lambda = k, K$ , regulär und eindeutig. Entsprechendes gilt für  $f_{II}(\lambda)$  und  $F_{II}(\lambda)$  bezüglich der Punkte

<sup>9)</sup> Tatsächlich sorgen die Integralgleichungen (17) und (18) von selbst für Erfüllung der Kantenbedingung, vgl. hierzu H. H ö n l u. A.-W. M a u e , Z. Physik 132 (1952), S. 569.



$\lambda = -k, -K$ . Die Forderung der Regularität oberhalb bzw. unterhalb des Weges von Bild 2 ist daher erfüllt, wenn wir den Weg noch so deformieren, daß er links oberhalb  $C_I$  und rechts unterhalb  $C_{II}$  verläuft (Bild 5).

Um die Wege  $C_I$  und  $C_{II}$  im einzelnen festzulegen, suchen wir die singulären Stellen von  $\ln F(z)$  auf. Das sind einmal die Verzweigungen von  $F(z)$ , d. i. die Punkte  $z = \pm k, \pm K$ , zum andern die Null- und Unendlichkeitsstellen von  $F(z)$ . Aus (26) erkennt man, daß die Unendlichkeitsstellen mit den Verzweigungen zusammenfallen und in den Nullstellen gelten muß

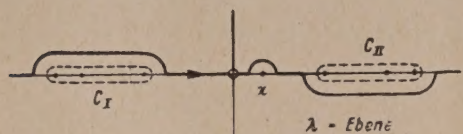


Bild 5

$$\left(\frac{K^2}{2} - z^2\right)^2 + z^2 \sqrt{(k^2 - z^2)(K^2 - z^2)} = 0 \quad (39).$$

Der linksstehende Ausdruck ist dabei in der gemäß Bild 3 aufgeschnittenen  $z$ -Ebene eindeutig. Ordnen wir, entsprechend Gl. (1), der Wellenzahl  $z$  mittels

$$z = \frac{\omega}{c} \quad (40)$$

eine Phasengeschwindigkeit  $c$  zu, so lautet die Bedingung (39), in den drei Geschwindigkeiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  geschrieben, sofern man  $c$  reell und kleiner als  $b$  annimmt:

$$a \left(b^2 - \frac{c^2}{2}\right)^2 = b^3 \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \quad \dots \dots \dots (41).$$

Das ist aber gerade die Gleichung für die Geschwindigkeit  $c = c_R$  der Rayleigh'schen Oberflächenwellen<sup>10)</sup>. Gehen wir wieder zur Wellenzahl  $z$  über, so haben wir damit als gesuchte Nullstellen von  $F(z)$

$$z = \pm \lambda_R, \quad \lambda_R = \frac{\omega}{c_R} > K \quad \dots \dots \dots (42).$$

Die Integrationswege  $C_I$  und  $C_{II}$  umschließen diese Punkte (Bild 4). Der Beweis dafür, daß (39) neben (42) keine weiteren Lösungen besitzt, sei nur angedeutet. Durch Multiplikation von (39) mit

$$\left(\frac{K^2}{2} - z^2\right)^2 - z^2 \sqrt{(k^2 - z^2)(K^2 - z^2)} = 0 \quad \dots \dots \dots (43)$$

gewinnt man eine Gleichung dritten Grades für  $z^2$ . Durch Einsetzen eines speziellen Zahlenwertes für das Verhältnis  $K:k$  läßt sich zeigen, daß von den drei Lösungen dieser Gleichung nur eine (39), die beiden anderen aber (43) befriedigen. Hieran kann sich durch kontinuierliche Variation des Zahlenverhältnisses  $K:k$  nichts ändern.

Zur Vorbereitung für eine numerische Auswertung von (38) ist es zweckmäßig, das Integral umzuformen. Der Integralwert ändert sich nicht, wenn im Integranden ein innerhalb der Schleife  $C_{I,II}$  reguläres additives Glied weggelassen wird. Wir können daher schreiben

$$f_{I,II}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{I,II}} \ln \left( 1 + \frac{\left(\frac{K^2}{2} - z^2\right)^2}{z^2 \sqrt{(k^2 - z^2)(K^2 - z^2)}} \right) \frac{dz}{z - \lambda} \quad \dots \dots \dots (44).$$

Aus demselben Grunde ist auch die Vieldeutigkeit des Logarithmus im Integranden belanglos.

Das Schleifenintegral läßt sich noch um die Punkte  $\mp k, \mp K, \mp \lambda_R$  zusammenziehen und als reelles Integral schreiben. Die Rechnung ergibt

$$f_{I,II}(\lambda) = \ln \frac{\lambda_R \pm \lambda}{K \pm \lambda} + \frac{1}{\pi} \int_{\mp k}^{\mp K} \arctg \frac{\left(\frac{K^2}{2} - z^2\right)^2}{z^2 \sqrt{(z^2 - k^2)(K^2 - z^2)}} \cdot \frac{dz}{z - \lambda} \quad \dots \dots \dots (45).$$

## § 5. Die Beugungserscheinungen

Es soll nunmehr das asymptotische Verhalten der gebeugten Wellen (33) in weitem Abstand von der beugenden Kante untersucht werden. Hierbei müssen sich neben der einfallenden Welle fünf Bestandteile ergeben, drei ebene Wellen und zwei Zylinderwellen. Die ebenen sind

<sup>10)</sup> Vgl. etwa A. Sommerfeld, Vorlesungen (I. c.), Bd. II, 1947, § 45.26.



die beiden reflektierten Wellen auf der Vorderseite des Beugungsschirms und eine dritte Welle hinter dem Schirm, die hier die einfallende Welle kompensiert und so den Schatten erzeugt. Die beiden Zylinderwellen, eine longitudinale und eine transversale, liefern die eigentlichen Beugungserscheinungen.

In Bild 6 sind die Strahlenrichtungen der einfallenden und reflektierten Wellen eingezeichnet und durch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  festgelegt. Von den einfallenden Wellen existiert jeweils nur eine, während die reflektierten Wellen beide gleichzeitig vorhanden sind. Für die Winkel gilt

$$\kappa = k \sin \alpha = K \sin \beta \quad \dots \quad (46).$$

Die Beugungswellen in (33) haben die allgemeine Form

$$\left. \begin{aligned} \Phi_b &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) e^{i(\lambda x + \sqrt{k^2 - \lambda^2} |y|)} d\lambda, \\ \Psi_b &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda) e^{i(\lambda x + \sqrt{K^2 - \lambda^2} |y|)} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (47).$$

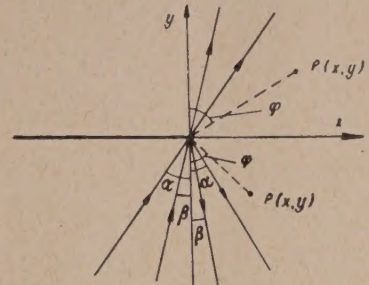


Bild 6

Durch die Substitutionen

$$\lambda = k \sin \gamma = K \sin \delta \quad \dots \quad (48)$$

und

$$x = r \sin \varphi, \quad |y| = r \cos \varphi \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \dots \quad (49)$$

(Bild 6) entsteht hieraus

$$\left. \begin{aligned} \Phi_b &= k \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} P(k \sin \gamma) e^{ikr \cos(\gamma-\varphi)} \cos \gamma d\gamma, \\ \Psi_b &= K \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} Q(K \sin \delta) e^{iKr \cos(\delta-\varphi)} \cos \delta d\delta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (50).$$

Zur Durchführung des Grenzüberganges  $r \rightarrow \infty$  haben wir den Sattelpunkt des Integranden aufzusuchen, der ersichtlich bei

$$\gamma = \varphi \quad \text{bzw.} \quad \delta = \varphi \quad \dots \quad (51)$$

liegt. Das Integral über den Sattelpunkt liefert bis auf unwesentliche Zahlenfaktoren

$$\Phi_b \sim k \cdot P(k \sin \varphi) \cos \varphi \cdot \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad \Psi_b \sim K \cdot Q(K \sin \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \frac{e^{iKr}}{\sqrt{Kr}} \quad \dots \quad (52),$$

d. i. die auslaufenden Zylinderwellen. Um die beiden Intensitäten miteinander vergleichen zu können, haben wir an Stelle der Potentiale die Verschiebungen  $\xi$  zu betrachten, und zwar ist die (zeitlich gemittelte) Energiedichte proportional zu  $|\xi|^2$ . Beim Übergang zur Intensität (Energiestrom) ist noch mit der für beide Wellen verschiedenen Schallgeschwindigkeit zu multiplizieren. So erhält man unter Weglassung von beiden Wellen gemeinsamen Faktoren für die relativen Intensitäten mit Rücksicht auf (3) und (1)

$$k \cdot |\Phi_b|^2 \sim \frac{k^2 \cos^2 \varphi}{r} \cdot |P(k \sin \varphi)|^2, \quad K \cdot |\Psi_b|^2 \sim \frac{K^2 \cos^2 \varphi}{r} \cdot |Q(K \sin \varphi)|^2 \quad (55).$$

Das ist das gesuchte Beugungsbild.

Weiter bleibt zu beachten, daß der Integrationsweg in Bild 2 oberhalb des Poles  $\lambda = \kappa$  herumläuft. Es sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß der Sattelpunkt in der  $\lambda$ -Ebene  $\lambda_0 = k \sin \varphi$  bzw.  $K \sin \varphi$  links oder rechts von  $\kappa$  liegt:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad \varphi < \alpha \text{ bzw. } \beta, & \quad \lambda_0 < \kappa \\ 2. \quad \varphi > \alpha \text{ bzw. } \beta, & \quad \lambda_0 > \kappa \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (54).$$

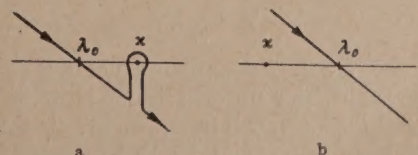


Bild 7

Da, wie man sich leicht überlegt, der Weg in der  $\lambda$ -Ebene durch den Sattelpunkt unter  $45^\circ$  von links oben nach rechts unten verläuft, bleibt er im ersten Falle (Bild 7a) am Pol  $\lambda = \kappa$  hängen, im zweiten Falle nicht (Bild 7b). Im ersten Falle liefert also das Residuum in  $\lambda = \kappa$  einen Beitrag zum Integral. Aus Bild 6 erkennt man, daß  $\varphi < \alpha$  bzw.  $\beta$  gerade der Bereich ist, in dem Reflexion und Schatten auftreten.



Wir betrachten zunächst den Fall  $y > 0$ , d. h. oberes Vorzeichen in den Formeln (33). Der in negativem Sinne umlaufende Pol  $\lambda = \kappa$  liefert in (33a, d) einen Beitrag, der die einfallende Welle genau kompensiert, während er in (33b, c) nichts beiträgt. Für  $y < 0$  unteres Vorzeichen, liefern alle Integrale einen Beitrag. Die Formeln lassen sich in einfacher Form schreiben, wenn man die Winkel  $\alpha, \beta, \varphi$  gemäß (46) und (49) einführt. Es wird dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{K^2}{2} - \kappa^2 &= \frac{K^2}{2} \cos 2\beta, & \kappa \sqrt{K^2 - \kappa^2} &= \frac{K^2}{2} \sin 2\beta, \\ \kappa \sqrt{k^2 - \kappa^2} &= \frac{K^2}{2} \sin 2\beta \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55)$$

und aus (33) entsteht

I. Reflexion der Druckwelle.

$$\Phi = e^{i k r \cos(\varphi + \alpha)} + \frac{\operatorname{tg}^2 2\beta \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 2\beta \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha} e^{i k r \cos(\varphi - \alpha)} \dots \dots \dots (56a),$$

$$\Psi = \frac{2 \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}^2 2\beta \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha} e^{i K r \cos(\varphi - \beta)} \dots \dots \dots (56b).$$

II. Reflexion der Schubwelle.

$$\Phi = -\frac{2 \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 2\beta \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha} e^{i k r \cos(\varphi - \alpha)} \dots \dots \dots (56c),$$

$$\Psi = e^{i K r \cos(\varphi + \beta)} + \frac{\operatorname{tg}^2 2\beta \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 2\beta \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha} e^{i K r \cos(\varphi - \beta)} \dots \dots \dots (56d)$$

in Übereinstimmung mit den bekannten Verhältnissen bei der Reflexion elastischer Wellen an einer freien ebenen Oberfläche<sup>2)</sup>.

Liegt  $\varphi$  innerhalb des Winkelbereiches der Totalreflexion für Schubwellen, d. h.  $K \sin |\varphi| > k$ , so bleibt der Integrationsweg in (33b, d) auch an einem der beiden Verzweigungspunkte  $\pm k$  hängen. Der Beitrag des entstehenden Schleifenintegrals um diesen Punkt verschwindet jedoch wie  $1/r$  für  $r \rightarrow \infty$ , ist daher für das asymptotische Verhalten der Wellen belanglos.

Eingegangen am 14. Februar 1952.

## Theorie der Druckstabilität der Sandwichplatte. II.

Von H. Neuber in Dresden

Zweiter Teil der in dieser Zeitschrift, Bd. 32, S. 325—337 erschienenen Arbeit. Auswertung der Theorie für die technische Anwendung, Diagramme für das optimale Wandstärkenverhältnis.

Second part of the paper, published in this journal, Bd. 32, S. 325—337. Development of the results for technical applications, diagrams for the optimum ratio of thickness.

Deuxième partie de la théorie (la première partie était apparue dans Bd. 32, S. 325—337. du journal). Explication des résultats pour l'application technique avec des diagrammes pour les dimensions optimales.

Вторая часть в этом журнале, Том 32, стр. 325—337 опубликованной работы. Использование теорий для технической применимости с диаграммами для лучших измерений.

### 6. Linearisierung

Da die Zusammendrückung der Platte praktisch nur in jenem Bereich untersucht zu werden braucht, der unterhalb der Bruchfestigkeit liegt, kommen für die Auswertung nur Werte von  $\varepsilon$  und damit von  $S$  in Betracht, die sehr klein gegenüber 1 sind. Mithin ist eine Entwicklung sämtlicher Ausdrücke nach Potenzen von  $S$  zweckmäßig. Wie nachstehend gezeigt wird, ergibt sich auf diese Weise für die Stabilitätsbedingung eine Potenzreihe, die bei der dreischichtigen Platte mit der dritten, bei der zweischichtigen Platte mit der vierten Potenz beginnt. Wird jeweils soweit entwickelt, daß noch der Faktor der nächst höheren Potenz exakt herauskommt, und werden alle weiteren Potenzen vernachlässigt, so folgt für  $S$  jeweils eine lineare Gleichung, welche für die Auswertung wesentliche Vorteile aufweist. Zunächst seien die Größen  $\varrho^2, \psi$  und  $\mu$ , sowie die in der weiteren Rechnung auftretenden Kombinationen dieser Größen nach Potenzen von  $S$  entwickelt. Mit Hilfe der Binomialreihe erhält man:



$$\left. \begin{aligned}
 \varrho^2 &= \frac{1+S}{1-S} = 1 + 2S + 2S^2 + 2S^3 + \dots, \\
 \varrho &= [1 + (\varrho^2 - 1)]^{1/2} = 1 + S + \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2}S^3 + \dots, \\
 \psi &= (1-S^2)[1 + (1-2c)S^2]^{-1} = 1 + (-2+2c)S^2 + (1-2c)(2-2c)S^4 + \dots, \\
 \mu &= (1-S)[1 - (1-2c)S][1 + (1-2c)S^2]^{-1} \\
 &= 1 + (-2+2c)S + (1-2c)(2-2c)S^3 + \dots, \\
 (\mu-1)(\psi+\mu-2) &= 4(1-c)^2S^2(1+S) + \dots, \\
 \frac{\psi}{\varrho} &= 1 - S + \left(-\frac{3}{2} + 2c\right)S^2 + \left(\frac{3}{2} - 2c\right)S^3 + \dots, \\
 \left(\frac{\psi}{\varrho}\right)^3 &= 1 - 2S + (-2+4c)S^2 + \dots, \\
 \mu\varrho &= 1 + (-1+2c)S + \left(-\frac{3}{2} + 2c\right)S^2 + \dots, \\
 \mu\psi + \mu - 2 &= (-4+4c)S + (-2+2c)S^2 + \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (102).$$

Für die Hyperbelfunktionen ergibt sich mittels der Taylor-Reihe:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{S}in \varrho\beta &= \mathfrak{S}in [\beta + (\varrho-1)\beta] = \mathfrak{S}in \beta + (\varrho-1)\beta \mathfrak{C}of \beta + \dots \\
 &= \mathfrak{S}in \beta + S\beta \mathfrak{C}of \beta + \frac{1}{2}S^2(\beta \mathfrak{C}of \beta + \beta^2 \mathfrak{S}in \beta) + \\
 &\quad + \frac{1}{6}S^3(3\beta \mathfrak{C}of \beta + 3\beta^2 \mathfrak{S}in \beta + \beta^3 \mathfrak{C}of \beta) + \dots, \\
 \mathfrak{C}of \varrho\beta &= \mathfrak{C}of \beta + S\beta \mathfrak{S}in \beta + \frac{1}{2}S^2(\beta \mathfrak{S}in \beta + \beta^2 \mathfrak{C}of \beta) + \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (103).$$

Bei Anwendung dieser Entwicklung steht der Auflösung der Basisfunktionen nichts im Wege. Bei  $\Phi_5$  zeigt sich, daß die Reihe mit  $S^2$  beginnt, so daß an sich bei  $\mathfrak{S}in \varrho\beta$  und  $\mathfrak{C}of \varrho\beta$  eine Entwicklung bis zur dritten Potenz von  $S$  erforderlich wäre. Dies läßt sich jedoch vermeiden, wenn eine Aufspaltung von  $\Phi_5$  vorgenommen wird, wie z. B. die folgende:

$$\Phi_5(\beta) = (\mu\psi + \mu - 2)(\mathfrak{C}of 2\varrho\beta - \mathfrak{C}of 2\beta) + (\mu - 1)(\mu + \psi - 2) + 4\Phi_2(\beta)\Phi_3(\beta) \quad (104).$$

Für die kürzere Darstellung des Ergebnisses seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_1(\beta) &= \frac{1}{2}S[\Phi_{10}(\beta) + S\Phi_{11}(\beta)], & \Phi_2(\beta) &= \frac{S}{2}[\Phi_0(\beta) + S\Phi_1(\beta)], \\
 \Phi_3(\beta) &= \frac{S}{2}[\Phi_{30}(\beta) + S\Phi_{31}(\beta)], & \Phi_4(\beta) &= \frac{S}{2}[\Phi_{40}(\beta) + S\Phi_{41}(\beta)], \\
 \Phi_5(\beta) &= \frac{1}{4}S^2[\Phi_{50}(\beta) + S\Phi_{51}(\beta)]
 \end{aligned} \right\} \quad (105).$$

Bei Unterdrückung der Zwischenrechnungen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_{10}(\beta) &= \mathfrak{S}in 2\beta - 2\beta, & \Phi_{11}(\beta) &= \left(\frac{3}{2} - 2c\right)\mathfrak{S}in 2\beta + \beta \mathfrak{C}of 2\beta, \\
 \Phi_{20}(\beta) &= \mathfrak{S}in 2\beta + 2\beta, & \Phi_{21}(\beta) &= \left(\frac{3}{2} - 2c\right)\mathfrak{S}in 2\beta + \beta \mathfrak{C}of 2\beta, \\
 \Phi_{30}(\beta) &= (3-4c)\mathfrak{S}in 2\beta + \beta, \\
 \Phi_{31}(\beta) &= \left(\frac{3}{2} - 2c\right)(\mathfrak{S}in 2\beta + 2\beta \mathfrak{C}of 2\beta) + 2\beta, \\
 \Phi_{40}(\beta) &= (3-4c)\mathfrak{S}in 2\beta - 2\beta, \\
 \Phi_{41}(\beta) &= \left(\frac{3}{2} - 2c\right)(\mathfrak{S}in 2\beta + 2\beta \mathfrak{C}of 2\beta) - 2\beta, \\
 \Phi_{50}(\beta) &= (6-8c)\mathfrak{C}of 4\beta + 10-24c+16c^2+16\beta^2, \\
 \Phi_{51}(\beta) &= (3-4c)[(4-4c)\mathfrak{C}of 4\beta + 4\beta \mathfrak{S}in 4\beta] + 4-4c+16\beta^2
 \end{aligned} \right\} \quad (106).$$



Nunmehr läßt sich die Stabilitätsbedingung in eine für  $S$  lineare Beziehung überführen. Die Auflösung nach  $S$  führt auf folgende Formeln:

Erste Linearisierung ( $S \ll 1$ )

A. Dreischichtige Platte mit gegensymmetrischer Verformung.

$$-S = \frac{(1-H)\Phi_{10}(\beta)\Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + 16(1-c)^2 H\Phi_{10}(\beta + \beta_1) + (1-H)\left[\Phi_{11}(\beta)\Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Phi_{10}(\beta)\Phi_{51}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right] + 16(1-c)^2 H[\Phi_{11}(\beta + \beta_1) + \Phi_{10}(\beta + \beta_1)] + 4H(H-1)\Phi_{10}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{30}(\beta) + 4H(H-1)\left[\Phi_{10}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\left\{\Phi_{21}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{30}(\beta) + \Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{31}(\beta)\right\} + \Phi_{11}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{30}(\beta)\right]}{(107)}$$

B. Dreischichtige Platte mit symmetrischer Verformung.

$$-S = \frac{(1-H)\Phi_{20}(\beta)\Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + 16(1-c)^2 H\Phi_{20}(\beta + \beta_1) + (1-H)\left[\Phi_{21}(\beta)\Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Phi_{20}(\beta)\Phi_{51}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right] + 16(1-c)^2 H[\Phi_{21}(\beta + \beta_1) + \Phi_{20}(\beta + \beta_1)] + 4H(H-1)\Phi_{10}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\frac{\beta_1}{2}\Phi_{40}(\beta) + 4H(H-1)\left[\Phi_{10}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\left\{\Phi_{21}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{40}(\beta) + \Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{41}(\beta)\right\} + \Phi_{11}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{40}(\beta)\right]}{(108)}$$

C. Zweischichtige Platte.

$$-S = \frac{(1-H)\Phi_{10}(\beta)\Phi_{20}(\beta)\Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + (1-H)\left[\Phi_{11}(\beta)\Phi_{20}(\beta)\Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Phi_{10}(\beta)\Phi_{21}(\beta)\Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Phi_{10}(\beta)\Phi_{20}(\beta)\Phi_{51}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right] + 16(1-c)^2 H\Phi_{10}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right) + 16(1-c)^2 H\left[\Phi_{11}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right) + \Phi_{10}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{21}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right) + \Phi_{10}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right)\right] + H(H-1)\Phi_{10}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{50}(\beta) + H(H-1)\left[\Phi_{10}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\left\{\Phi_{21}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{50}(\beta) + \Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{51}(\beta)\right\} + \Phi_{11}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\Phi_{50}(\beta)\right]}{(109)}$$

Da die Anforderungen des Leichtbaues — wie erwähnt — ausschließlich auf Kombinationen von dünnen, festen und damit tragenden Schichten mit dicken, weniger festen und besonders leichten Füllschichten führen, kommen für die praktische Anwendung nur Werte von  $h_1$  in Betracht, die sowohl gegenüber der Wandstärke  $h$ , als auch der Knickhalbwelle 1 als klein angesehen werden können. Der Parameter  $\beta_1$  bleibt daher auf Werte beschränkt, die sowohl gegenüber  $\beta$ , als auch gegenüber 1 klein sind. Hieraus ergibt sich ein zweiter Linearisierungsprozeß, indem die Stabilitätsbedingung außer nach  $S$  auch nach  $\beta_1$  entwickelt wird.

Mit Bezug auf die Gl. (107), (108) und (109) sind hierzu die Potenzreihen von  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  und  $\Phi_5$  erforderlich. Bei Anwendung der Potenzreihen der Hyperbelfunktionen folgt aus den Gleichungen (106) für das Argument  $\beta_1/2$ :



$$\left. \begin{aligned} \Phi_{10}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) &= \frac{1}{6} \beta_1^3 + \frac{1}{120} \beta_1^5 + \dots, & \Phi_{11}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) &= (2-2c) \beta_1 + \frac{1}{6} (3-2c) \beta_1^3 + \dots, \\ \Phi_{20}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) &= 2 \beta_1 + \frac{1}{6} \beta_1^3 + \dots, & \Phi_{21}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) &= (2-2c) \beta_1 + \frac{1}{6} (3-2c) \beta_1^3 + \dots, \\ \Phi_{50}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) &= 16 (1-c)^2 + 16 (1-c) \beta_1^2 + \dots, \\ \Phi_{51}\left(\frac{\beta_1}{2}\right) &= 16 (1-c)^2 + 8 (1-c) (5-4c) \beta_1^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (110).$$

Für die Gleichungen (107) und (108) werden außerdem Funktionen mit dem Argument  $(\beta + \beta_1)$  benötigt. Die zugehörigen Entwicklungen nach  $\beta_1$  sind:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{10}(\beta + \beta_1) &= \Phi_{10}(\beta) + 2 \beta_1 [\mathfrak{Cof} 2\beta - 1] + \dots, \\ \Phi_{11}(\beta + \beta_1) &= \Phi_{11}(\beta) + 2 \beta_1 [(2-2c) \mathfrak{Cof} 2\beta + \beta \mathfrak{Sin} 2\beta] + \dots, \\ \Phi_{20}(\beta + \beta_1) &= \Phi_{20}(\beta) + 2 \beta_1 [\mathfrak{Cof} 2\beta + 1] + \dots, \\ \Phi_{21}(\beta + \beta_1) &= \Phi_{21}(\beta) + 2 \beta_1 [(2-2c) \mathfrak{Cof} 2\beta + \beta \mathfrak{Sin} 2\beta] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (111).$$

Schließlich treten in Gl. (109) auch die entsprechenden Funktionen mit dem Argument  $(\beta + \beta_1/2)$  auf. Die zugehörigen Entwicklungen ergeben sich unmittelbar aus vorstehenden Gleichungen, wenn  $\beta_1/2$  statt  $\beta_1$  gesetzt wird.

Werden die so gewonnenen Ausdrücke in die Gl. (107), (108) und (109) eingesetzt, so empfiehlt sich die Ordnung von Zähler und Nenner nach Potenzen von  $H$ , wobei innerhalb des Koeffizienten jeder Potenz von  $H$  im Rahmen der beabsichtigten Linearisierung nur die niedrigste auftretende Potenz von  $\beta_1$  zu berücksichtigen ist. Wird noch in Zähler und Nenner durch  $16 (1-c)$  dividiert, so ergeben sich die nachstehenden Formeln:

**Zweite Linearisierung** ( $S \ll 1$ ,  $\beta_1 \ll 1$ ,  $\beta_1 \ll \beta$ ).

$$-S = \frac{f_0 + 2H\beta_1 f_1 + \frac{H^2 \beta_1^4}{12(1-c)^2} f_2}{g_0 + 2H\beta_1 g_1 + \frac{H^2 \beta_1^2}{1-c} f_2} \quad (112).$$

Hierin ist zu setzen:

**A. Für die dreischichtige Platte mit gegensymmetrischer Verformung:**

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \mathfrak{Sin} 2\beta - 2\beta, & f_1 &= \mathfrak{Cof} 2\beta - 1, & f_2 &= (3-4c) \mathfrak{Sin} 2\beta + 2\beta, \\ g_0 &= \left(\frac{5}{2} - 2c\right) \mathfrak{Sin} 2\beta + \beta \mathfrak{Cof} 2\beta - 2\beta, & g_1 &= (3-2c) \mathfrak{Cof} 2\beta - 1 + \beta \mathfrak{Sin} 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (113).$$

**B. Für die dreischichtige Platte mit symmetrischer Verformung:**

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \mathfrak{Sin} 2\beta + 2\beta, & f_1 &= \mathfrak{Cof} 2\beta + 1, & f_2 &= (3-4c) \mathfrak{Sin} 2\beta - 2\beta, \\ g_0 &= \left(\frac{5}{2} - 2c\right) \mathfrak{Sin} 2\beta + \beta \mathfrak{Cof} 2\beta + 2\beta, & g_1 &= (3-2c) \mathfrak{Cof} 2\beta + 1 + \beta \mathfrak{Sin} 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (114).$$

**C. Für die zweischichtige Platte:**

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2} \mathfrak{Cof} 4\beta - \frac{1}{2} - 4\beta^2, & f_1 &= \frac{1}{2} \mathfrak{Sin} 4\beta - 2\beta, \\ f_2 &= \left(\frac{3}{2} - 2c\right) \mathfrak{Cof} 4\beta + \frac{5}{2} - 6c + 4c^2 + 4\beta^2, \\ g_0 &= (2-2c) (\mathfrak{Cof} 4\beta - 1) + \beta \mathfrak{Sin} 4\beta - 4\beta^2, \\ g_1 &= \left(\frac{9}{4} - 2c\right) \mathfrak{Sin} 4\beta + \beta \mathfrak{Cof} 4\beta - 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (115).$$

Auf diese Formeln wird insbesondere im neunten Abschnitt Bezug genommen.

Für die Diskussion der Ergebnisse ist außer den bisherigen Linearisierungen noch eine weitere sehr aufschlußreich, welche sich für den Bereich der langen Knickwellen durchführen läßt, d. h. für den eigentlichen „Knickbereich“ (im Gegensatz zum „Beulbereich“, der das Gebiet der kurzen Wellen umfaßt). Im Knickbereich, der in den anfangs erwähnten zweiten Eulerbereich



überführt, sind  $\beta$  und  $\beta_1$  sehr klein gegenüber 1, da die Knickhalbwelle  $l$  als groß gegenüber  $h$  und  $h_1$  angesehen werden kann. Daher können für diesen Bereich durch Entwicklung nach  $\beta$  und  $\beta_1$  vereinfachte Formeln erzielt werden. Da hierbei  $S \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$ ,  $\beta_1 \ll 1$ , jedoch nicht  $\beta_1 \ll \beta$  vorausgesetzt ist, können die Beziehungen der zweiten Linearisierung nicht als Ausgangspunkt der Rechnung dienen, sondern es muß auf die erste Linearisierung zurückgegriffen werden. Zur Aufstellung der gewünschten Entwicklung ist es erforderlich, die Basisfunktionen (Gl. (105) und (106)) nach dem Argument zu entwickeln, wobei die Potenzreihen der Hyperbelfunktionen zur Anwendung kommen.

Die Entwicklungen von  $\Phi_{10}$ ,  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{20}$ ,  $\Phi_{21}$ ,  $\Phi_{50}$ , und  $\Phi_{51}$  können aus den Gl. (110) entnommen werden.

Für die übrigen Funktionen folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{30}(\beta) &= (8 - 8c)\beta + \left(4 - \frac{16}{3}c\right)\beta^3 + \dots, & \Phi_{31}(\beta) &= (8 - 8c)\beta + \left(8 - \frac{32}{3}c\right)\beta^3 + \dots, \\ \Phi_{40}(\beta) &= (4 - 8c)\beta + \left(4 - \frac{16}{3}c\right)\beta^3 + \dots, & \Phi_{41}(\beta) &= (4 - 8c)\beta + \left(8 - \frac{32}{3}c\right)\beta^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (116).$$

Durch Einsetzen in die Gl. (107), (108) und (109) ergeben sich nach kurzer Rechnung nachstehende Formeln:

**Dritte Linearisierung** ( $S \ll 1$ ,  $\beta_1 \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$ ).

**A. Dreischichtige Platte mit gegensymmetrischer Verformung.**

$$-S = \frac{(1-H)\beta^3 + H(\beta + \beta_1)^3 + \frac{H^2\beta\beta_1^4}{2-2c}}{3(1-c)(\beta + H\beta_1) + 6H^2\beta\beta_1^2} \dots \dots \dots (117)$$

**B. Dreischichtige Platte mit symmetrischer Verformung:**

$$-S = \frac{\beta + H\beta_1 + \frac{1-2c}{12(1-c)^2}H^2\beta\beta_1^4}{(2-c)(\beta + H\beta_1) + \frac{1-2c}{1-c}H^2\beta\beta_1^2} \dots \dots \dots (118).$$

**C. Zweischichtige Platte:**

$$-S = \frac{(1-H)\beta^4 + H\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right)^4 + H(H-1)\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^4}{3(1-c)\left(\beta + H\frac{\beta_1}{2}\right)^2} \dots \dots \dots (119).$$

Eine weitere Vereinfachung erfahren die Formeln, wenn außer  $S \ll 1$ ,  $\beta_1 \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  auch  $\beta_1 \ll \beta$  vorausgesetzt wird. Diese Approximation sei als vierte Linearisierung bezeichnet; die zugehörigen Endformeln folgen entweder direkt aus den Gleichungen (117) bis (119), wenn innerhalb des Koeffizienten jeder Potenz von  $H$  nur die niedrigste Potenz von  $\beta_1$  berücksichtigt wird, oder aus den Gleichungen (112) bis (115) durch Entwicklung nach  $\beta$ :

**Vierte Linearisierung** ( $S \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$ ,  $\beta_1 \ll \beta$ ).

**A. Dreischichtige Platte mit gegensymmetrischer Verformung:**

$$-S = \frac{\beta^3 + 3H\beta^2\beta_1 + \frac{H^2\beta\beta_1^4}{2-2c}}{3(1-c)(\beta + H\beta_1) + 6H^2\beta\beta_1^2} \dots \dots \dots (120).$$

**B. Dreischichtige Platte mit symmetrischer Verformung:**

$$-S = \frac{\beta + H\beta_1 + \frac{1-2c}{12(1-c)^2}H^2\beta\beta_1^4}{(2-c)(\beta + H\beta_1) + \frac{1-2c}{1-c}H^2\beta\beta_1^2} \dots \dots \dots (121).$$

**C. Zweischichtige Platte:**

$$-S = \frac{\beta^4 + 2H\beta^3\beta_1 + \frac{1}{16}H^2\beta_1^4}{3(1-c)(\beta + H\beta_1/2)^2} \dots \dots \dots (122).$$



## 7. Nachweis der Eulerbereiche

Wie schon anfangs erwähnt wurde, muß sich für lange Knickhalbwellen, d. h. bei Knickung über die volle Plattenlänge (beiderseits frei drehbare Ränder vorausgesetzt) ein Verhalten der Platte herausstellen, daß dem eines schlanken Stabes ähnlich ist; d. h. der Bereich der langen Knickwellen muß sich als „Euler-Bereich“ nachweisen lassen.

Zur Unterscheidung vom selbständigen Knicken des Bleches bei sehr kurzen Knickwellen („erster Euler-Bereich“) wird jener Bereich als „zweiter Euler-Bereich“ gekennzeichnet. Der Nachweis ergibt sich unmittelbar bei Anwendung der üblichen Näherungsvorstellung: Es wirken im wesentlichen nur Spannungen  $t_{xx}$ , und die Querschnitte bleiben eben. Bei Anwendung der Formänderungsgleichungen (20) folgt mit  $t_{yy} = 0$ :

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{c e^*}{1 - 2c} \dots \dots \dots (123).$$

Definitionsgemäß war entsprechend Gl. (7) und (2)

$$e^* = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \dots \dots \dots (124),$$

so daß nach Elimination von  $\frac{\partial V_y}{\partial y}$

$$e^* = \frac{1 - 2c}{1 - c} \frac{\partial V_x}{\partial x} \dots \dots \dots (125)$$

zu setzen ist.

Mit Bezug auf die erste der Gl. (20) gilt daher:

$$t_{xx} = \frac{2G}{1 - c} \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{E}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)(1 - c)} \frac{\partial V_x}{\partial x} \dots \dots \dots (126).$$

Andererseits folgt aus  $t_{xy} = 0$  bei Integration nach  $y$ , wenn nunmehr die Verschiebung  $V_y$  „Durchbiegung“) als eine Funktion von  $x$  allein angesehen wird,

$$V_x = (y_0 - y) \frac{dV_y}{dx} \dots \dots \dots (127).$$

Demnach ist

$$t_{xx} = \frac{(y)}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)(1 - c)} (y_0 - y) \frac{d^2 V_y}{dx^2} \dots \dots \dots (128)$$

die Formänderungsgleichung, die für Biege- und Knickvorgänge bei Platten anzuwenden ist, deren Dicke als genügend klein gegenüber dem Krümmungsradius ihrer Biegelinie angesehen werden kann. Wird hierbei der Elastizitätsmodul  $E$  als Funktion von  $y$  aufgefaßt, so ist Gl. (128) für beliebig geschichtete Platten (für kontinuierliche und diskontinuierliche Schichtung) anwendbar. Bei Integration über die Plattendicke treten die Hilfsgrößen

$$\int_{y_1}^{y_2} E(y) dy = K_0, \quad \int_{y_1}^{y_2} E(y) y dy = K_1, \quad \int_{y_1}^{y_2} E(y) y^2 dy = K_2 \dots \dots (129)$$

auf. Da beim Knickvorgang keine zusätzliche Axialkraft auftreten kann, muß das Integral der Spannungen über die Dicke verschwinden. Hieraus folgt eine Bedingung für die Integrationskonstante  $y_0$ :

$$y_0 = \frac{K_1}{K_0} \dots \dots \dots (130).$$

Wird die auf die Längeneinheit der Plattenbreite bezogene Knicklast mit  $P$  bezeichnet, so hat das Moment der Knicklast, wenn ihre Wirkungslinie vor Eintreten des Knickvorganges den Abstand  $C_1$  von der Stelle  $y = 0$  hatte, während der Knickung an jeder Stelle der Platte den Betrag  $P(C_1 - V_y)$ . Andererseits hat das Moment der Spannungen  $t_{xx}$  den Betrag

$$\frac{y_0 K_1 - K_2}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)(1 - c)} \frac{d^2 V_y}{dx^2} = \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)(1 - c) K_0} \frac{d^2 V_y}{dx^2} \dots \dots \dots (131).$$



Als Gleichgewichtsaussage ergibt sich demnach die Differentialgleichung:

$$B \frac{d^2 V_y}{dx^2} + P (V_y - C_1) = 0 \quad \dots \dots \dots (132).$$

Hierbei stellt die Größe

$$B = \frac{K_0 K_2 - K_1^2}{\left(1 + \frac{1}{m}\right) (1 - c) K_0} \quad \dots \dots \dots (133)$$

die „Biegesteifigkeit der geschichteten Platte“ dar. Aus der Lösung der Differentialgleichung

$$V_y = C_1 + C_2 \sin(\varphi x) \quad \dots \dots \dots (134)$$

folgt die Knicklast

$$P = \varphi^2 B \quad \dots \dots \dots (135).$$

Herrschte während des Aufbringens der Druckbelastung Hookesches Gesetz mit derselben Verteilung der Elastizitätsmoduln, so läßt sich die Knicklast aus der Zusammendrückung  $-\varepsilon$  nach der Gleichung

$$P = -\varepsilon K_0 \quad \dots \dots \dots (136)$$

errechnen. Demnach folgt

$$-\varepsilon = \varphi^2 \frac{B}{K_0} = \frac{K_0 K_2 - K_1^2}{\left(1 + \frac{1}{m}\right) (1 - c) K_0^2} \varphi^2 \quad \dots \dots \dots (137)$$

und

$$-S = \frac{K_0 K_2 - K_1^2}{(1 - c) K_0^2} \varphi^2 \quad \dots \dots \dots (138).$$

Bei der dreischichtigen Platte wird

$$K_0 = E h + 2 E h_1, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = \frac{1}{12} [(E - E_1) h^3 + E_1 (h + 2 h_1)^3] \quad \dots (139),$$

$$B = \frac{(E - E_1) h^3 + E_1 (h + 2 h_1)^3}{12 \left(1 + \frac{1}{m}\right) (1 - c)} \quad \dots \dots \dots (140),$$

$$-S = \frac{(1 - H) \beta^3 + H (\beta + \beta_1)^3}{3 (1 - c) (\beta + H \beta_1)} \quad \dots \dots \dots (141).$$

Bei der zweischichtigen Platte wird

$$K_0 = E h + E_1 h_1, \quad K_1 = \frac{1}{2} (-E_1 h_1^2 + E h^2), \quad K_2 = \frac{1}{3} (E_1 h_1^3 + E h^3) \quad \dots (142),$$

$$B = \frac{E (E - E_1) h^4 + E E_1 (h + h_1)^4 + E_1 (E_1 - E) h_1^4}{12 \left(1 + \frac{1}{m}\right) (1 - c) (E h + E_1 h_1)^2} \quad \dots \dots \dots (143),$$

$$-S = \frac{(1 - H) \beta^4 + H (\beta + \beta_1/2)^4 + H (H - 1) (\beta_1/2)^4}{3 (1 - c) (\beta + H \beta_1/2)^2} \quad \dots \dots \dots (144).$$

Bei Vergleich mit den Beziehungen (117) und (119) erkennt man völlige Übereinstimmung für die zweischichtige Platte. Bei der dreischichtigen Platte ist zu beachten, daß die Glieder mit  $H^2$  in Gl. (117) mit  $\beta \beta_1^4$  (d. h.  $\varphi^5$ ) im Zähler bzw.  $\beta \beta_1^2$  (d. h.  $\varphi^3$ ) im Nenner behaftet sind und daher bei langen Knickwellen, also kleinem Betrag  $\varphi$  klein sind gegenüber  $\beta^3$  und  $(\beta + \beta_1)^3$  (d. h.  $\varphi^3$ ) im Zähler, bzw.  $\beta$  und  $\beta_1$  (d. h.  $\varphi$ ) im Nenner. Beim Grenzübergang zum Euler-Verhalten stellen daher die Glieder mit  $H^2$  in Gl. (117) Größen dar, die mit abnehmenden  $\varphi$ -Werten beliebig klein werden, so daß in der Tat Gl. (117) gegen Gl. (141) konvergiert. Damit ist der Grenzübergang zum zweiten Euler-Bereich nachgewiesen.

Andererseits leisten die Gl. (117) und (119) für  $H = \infty$  den Übergang zum ersten Eulerbereich (selbständiges Knicken also „Beulen“ der Außenschicht); in diesem Falle gilt:

$$-S = \frac{\beta_1^2}{12 (1 - c)} \quad \dots \dots \dots (145).$$



Gl. (141) des zweiten Euler-Bereiches ist dagegen an das Ebenbleiben des Plattenquerschnittes gebunden und liefert mit  $H = \infty$ :

$$-S = \frac{\beta^2 + \beta\beta_1 + \beta_1^2/3}{1 - c} \dots \dots \dots (146),$$

also einen Ausdruck, welcher dem Knickvorgang zweier in festem Abstand unverschieblich gegeneinander festgehaltenen Bleche entspricht.

### 8. Erweiterung auf nicht-lineares Formänderungsgesetz

Bei guter Ausnutzung der Tragfähigkeit eines Bauteiles muß die Beanspruchung möglichst dem sicherheitsmäßig zulässigem Spannungswert genähert werden. Dieser liegt bei den meisten technischen Werkstoffen in einem Gebiet, in welchem die Formänderungskurve nicht mehr linear verläuft, so daß bei Stabilitätsbetrachtungen die bisherigen Ableitungen nicht mehr direkt anwendbar sind. Es läßt sich jedoch zeigen, daß die dargelegte Theorie bei Einführung gewisser vereinfachender Annahmen auch für nicht-lineares Formänderungsgesetz gültig bleibt.

Wird zunächst ein Stab oder eine Platte von gleichem Werkstoff betrachtet, so führt die Frage nach der Stabilität eines Druckzustandes (Druckspannung  $-\sigma$ , Zusammendrückung  $-\varepsilon$ ) auf die Betrachtung der näheren Umgebung des zugehörigen Punktes  $A$  der Formänderungskurve (Bild 3). Wird die Formänderungskurve als stetig, differenzierbar und umkehrbar vorausgesetzt (von Verfestigung wird also abgesehen), so kann ihr Verlauf in der Umgebung von  $A$  durch die Gerade

$$\sigma = \bar{\sigma} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \quad (147)$$

ersetzt werden.

Die Spannung  $\bar{\sigma}$  entspricht hierbei der Vorspannung  $T_{xx}$ , während die beliebig kleinen Spannungszuwüchse  $\sigma - \bar{\sigma}$  mit den Spannungen  $t_{xx}$ , die Dehnungszuwüchse  $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$  mit den Dehnungen  $\partial Vx/\partial x$  identisch sind. An die Stelle des Elastizitätsmoduls tritt demnach der

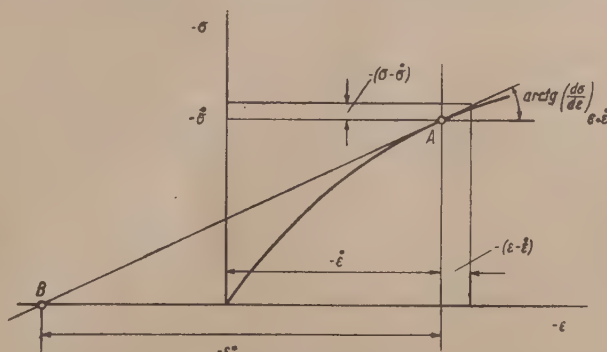


Bild 3. Zur Stabilitätsbetrachtung bei nicht-linearem Formänderungsgesetz

„fiktive Elastizitätsmodul“ oder „Engessermodul“<sup>7)</sup> während in Gl. (35) an die Stelle der Zusammendrückung  $-\varepsilon$  eine fiktive Zusammendrückung zu setzen ist, welche mit  $-\varepsilon^*$  bezeichnet werden möge; sie ist durch die Bedingung festgelegt, daß bei Multiplikation mit dem fiktiven Elastizitätsmodul die tatsächlich wirkende Druckvorspannung  $-\bar{\sigma}$  erhalten wird:

$$-\bar{\sigma} = -\varepsilon^* \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \dots \dots \dots (148).$$

Hieraus folgt bei Division durch  $(d\sigma/d\varepsilon)_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}}$ :

$$-\varepsilon^* = -\frac{\bar{\sigma}}{\left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}}} = -\left( \frac{d\varepsilon}{d \ln \sigma} \right)_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} \dots \dots \dots (149).$$

Liegt  $-\varepsilon^*$  als Rechnungswert auf Grund der Theorie vor, so kann demnach sowohl  $-\bar{\varepsilon}$ , als auch  $-\bar{\sigma}$  an Hand der Formänderungskurve mit Hilfe der Gl. (149) bestimmt werden. Die geometrische Betrachtung läßt erkennen (Bild 3), daß der zugehörige Punkt der Formänderungskurve der Bedingung entspricht, daß die Subtangente gleich  $-\varepsilon^*$  wird. Ein anderer Weg wäre die Konstruktion einer Kurve mit dem Funktionswert  $-\frac{d\varepsilon}{d \ln \sigma}$  als Ordinate und  $-\varepsilon$  als Abszisse. Der zugehörige Kurvenpunkt hätte hierbei die Ordinate  $-\varepsilon^*$ .

Bei der mehrschichtigen Platte wurde zur einfacheren Durchführung der Rechnung angenommen, daß alle Schichten bei Knickbeginn die gleiche Zusammendrückung  $-\varepsilon$  besitzen. Für nicht-lineares Formänderungsgesetz bedeutet diese Annahme die Übereinstimmung von  $-\bar{\varepsilon}$ .

<sup>7)</sup> Die Einführung der Größe  $d\sigma/d\varepsilon$  an Stelle des Elastizitätsmoduls bei Knickung von Stäben mit nicht-linearem Formänderungsgesetz geht auf F. Engesser zurück; vgl. Z. VDI 42 (1898), S. 927.



Wird ferner zur Vereinfachung angenommen, daß auch  $-\varepsilon^*$  übereinstimmt, so schneiden im Augenblick des Knickbeginnes die Tangenten der Formänderungskurven für die Werkstoffe der verschiedenen Schichten die  $\varepsilon$ -Achse an der gleichen Stelle (Bild 4). Als Bedingungsgleichung folgt demnach:

$$\left( \frac{d\varepsilon}{d \ln \sigma_1} - \frac{d\varepsilon}{d \ln \sigma} \right)_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0 \quad (150).$$

Soll das Stabilitätsverhalten für alle Punkte der Formänderungskurve untersucht werden, so wird diese Bedingung zweckmäßig für alle Punkte vorgeschrieben, d. h. die Formänderungskurven unterscheiden sich nur durch einen Faktor:

$$\sigma(\varepsilon) = K \sigma_1(\varepsilon) \quad (151).$$

Demnach wird das Verhältnis  $H$  der Elastizitätszahlen von  $\varepsilon$  unabhängig. Ferner wurde angenommen, daß die Poissonschen Konstanten der Schichten untereinander übereinstimmen und von der Zusammendrückung unabhängig sind.

Es ist zwar ohne weiteres möglich, die Theorie von diesen Einschränkungen frei zu machen; nur muß dann ein entsprechender Rechenaufwand in Kauf genommen werden. Es bleibt indes fraglich, ob derartige Verfeinerungen noch praktisch interessieren; daher wurde in der vorliegenden Arbeit hiervon abgesehen.

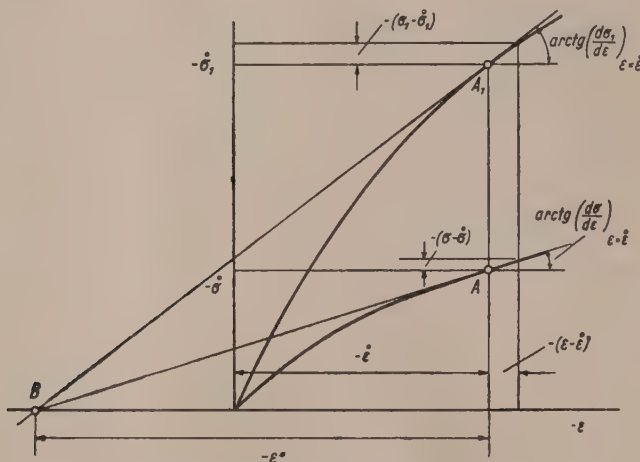


Bild 4. Zur Stabilitätsuntersuchung der mehrschichtigen Platte bei nicht-linearem Formänderungsgesetz

## 9. Auswertung

Für die praktische Anwendung kommen nur kleine Werte von  $S$  und  $\beta_1$  in Betracht, also die Gl. (112) bis (115) der zweiten Linearisierung. Um das Stabilitätsverhalten einer bestimmten Ausführungsform mit festen Werten  $h$  und  $h_1$  beurteilen zu können, ist die Einführung des Wandstärkenverhältnisses  $\alpha$  zweckmäßig. Es wurde

bei der zweischichtigen Platte:

$$\alpha = h_1/h = \beta_1/2\beta$$

bei der dreischichtigen Platte:

$$\alpha = 2 h_1/h = \beta_1/\beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = h_1/h = \beta_1/2\beta \\ \alpha = 2 h_1/h = \beta_1/\beta \end{array} \right\} \dots \dots \dots (152),$$

gesetzt. Die Gl. (112) bis (115) stellen daher bei festen Werten  $H$  und  $\alpha$  die Größe  $-S$  und damit  $-\varepsilon^*$  als Funktion von  $\beta$  dar. Damit die Kurven näher zusammenrücken, wurde für die Auftragung die Größe  $\beta_1$  ( $= \alpha\beta$  bzw.  $2\alpha\beta$ ), als Abszisse gewählt, welche als „reduzierte Wandstärke“ bezeichnet werden kann. Die Auswertung wurde für breite Platten ( $c = 1/m$ ) mit der Poissonschen Konstanten  $1/m = 0,3$  und einem Verhältnis der Elastizitätszahlen  $E_1/E = H = 700$  durchgeführt. Bild 5 und 6 zeigen die kritische Zusammendrückung der dreischichtigen Platte (gegensymmetrischer Fall) und der zweischichtigen Platte, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit doppelt-logarithmischer Maßstab verwendet wurde. Von der Auftragung des symmetrischen Knickfalles der dreischichtigen Platte konnte abgesehen werden, da die Rechnung im praktischen Bereich stets höhere Knicklasten liefert als im gegensymmetrischen Fall.

Infolge der doppelt-logarithmischen Auftragung sind die beiden Euler-Bereiche unmittelbar am gradlinigen Verlauf der Kurven  $\alpha = \text{konst}$  zu erkennen. Für  $\alpha = 0,01; 0,15$  und  $0,10$  sind in Bild 5 auch die der Arbeit von Gough-Elam-de Bruyne entsprechenden Kurven eingezeichnet. Sie entsprechen der Vernachlässigung von  $f_0, g_0$  und  $g_1$ . Für große  $\beta_1$ -Werte verlaufen sie noch in der Nähe der exakten Kurven, verlassen diese jedoch für abnehmendes  $\beta_1$  mehr und mehr und streben für kleines  $\beta_1$  gegen den Festwert  $1/2 H\alpha (1 + 1/m)$ , statt gegen Null, so daß sie den Übergang zum zweiten Euler-Bereich nicht wiedergeben.

Für die exakten Kurven  $\alpha = \text{konst}$  ist außer dem klar hervortretenden Übergang zum zweiten Euler-Bereich die Ausbildung eines Minimums an der Stelle  $\beta_1 = 0,167, -\varepsilon^* = 0,0078$



$= -\varepsilon_b^*$  von Bedeutung. Dies gilt bei der dreischichtigen Platte (Bild 5) für alle Kurven mit  $\alpha \leq 0,06$ ; bis etwa  $\alpha = 0,08$  findet eine kleine Verlagerung des Minimums statt; für  $\alpha \geq 0,08$  tritt schließlich kein Minimum mehr auf, und die Kurven verlaufen vom zweiten zum ersten Euler-Bereich in durchweg positiver Steigung. Bei der zweischichtigen Platte (Bild 6) zeigt sich das ausgeprägte Minimum bis etwa  $\alpha = 0,04$ , während es für  $\alpha \geq 0,05$  verschwunden ist.

Da für die Ausbildung der Knickverformung der Platte als Knickhalbwellen  $l$  alle ganzzahligen Bruchteile der Plattenlänge  $l^*$  in Betracht kommen und andererseits nur der niedrigste  $-\varepsilon^*$ -Wert für das Eintreten der Verformung maßgeblich ist, so kommen die gestrichelt ge-

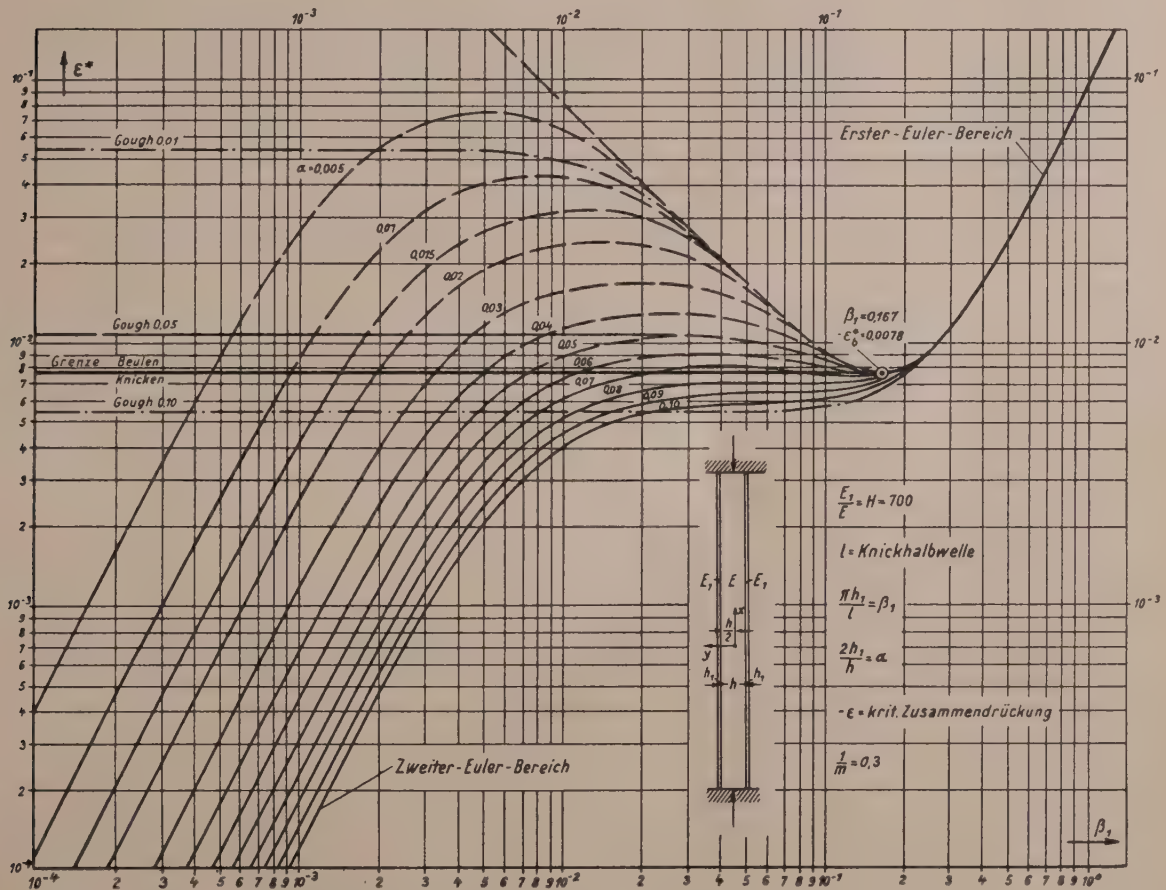


Bild 5. Kritische Stauchung der dreischichtigen Platte in Abhängigkeit von der reduzierten Wandstärke

zeichneten Kurvenäste, welche oberhalb des Minimums  $-\varepsilon_b^*$  verlaufen, für die praktische Anwendung nicht in Betracht und sind durch die Stelle  $-\varepsilon^* = -\varepsilon_b^*$ , die kurz als „Beulgrenze“ gekennzeichnet sei, ersetzt zu denken.

Zur Erläuterung dieses Sachverhaltes wurde in Bild 7 die Zusammendrückung der dreischichtigen Platte in gewöhnlichem Maßstab über  $\beta_1^* = \pi h_1/l^*$  aufgetragen ( $l^* =$  Plattenlänge). In dieser Darstellung kann die Beulgrenze an unendlich vielen, einzelnen Punkten der Geraden  $-\varepsilon^* = -\varepsilon_b^*$  liegen, je nachdem, wie groß die ganze Zahl der Knickhalbwellen ist, die sich über die Plattenlänge erstrecken. Die Einzelpunkte liegen im praktischen Bereich so nahe beieinander, daß die Gerade  $-\varepsilon^* = -\varepsilon_b^*$  direkt als Beulgrenze aufgefaßt werden kann (bei genauer Darstellung wären die Einzelpunkte girlandenartig durch Kurvenstücke verbunden; der so entstehende vielfach geknickte Kurvenzug fällt jedoch mit ausreichender Genauigkeit mit der Geraden zusammen). Die Linien  $\alpha = \text{konst}$  steigen in diesem Diagramm zunächst bis zur Beulgrenze nahezu parabelförmig an. Unterhalb der Beulgrenze tritt stets Knicken über die gesamte Plattenlänge ein ( $n = l^*/l = 1$ ). Im Schnittpunkt A mit der Beulgrenze ist sowohl Knicken ( $n = 1$ ), als auch Beulen (z. B.  $n = 348$  für  $\alpha = 0,005$ ) möglich. Darüber hinaus tritt nur noch Beulen ein.



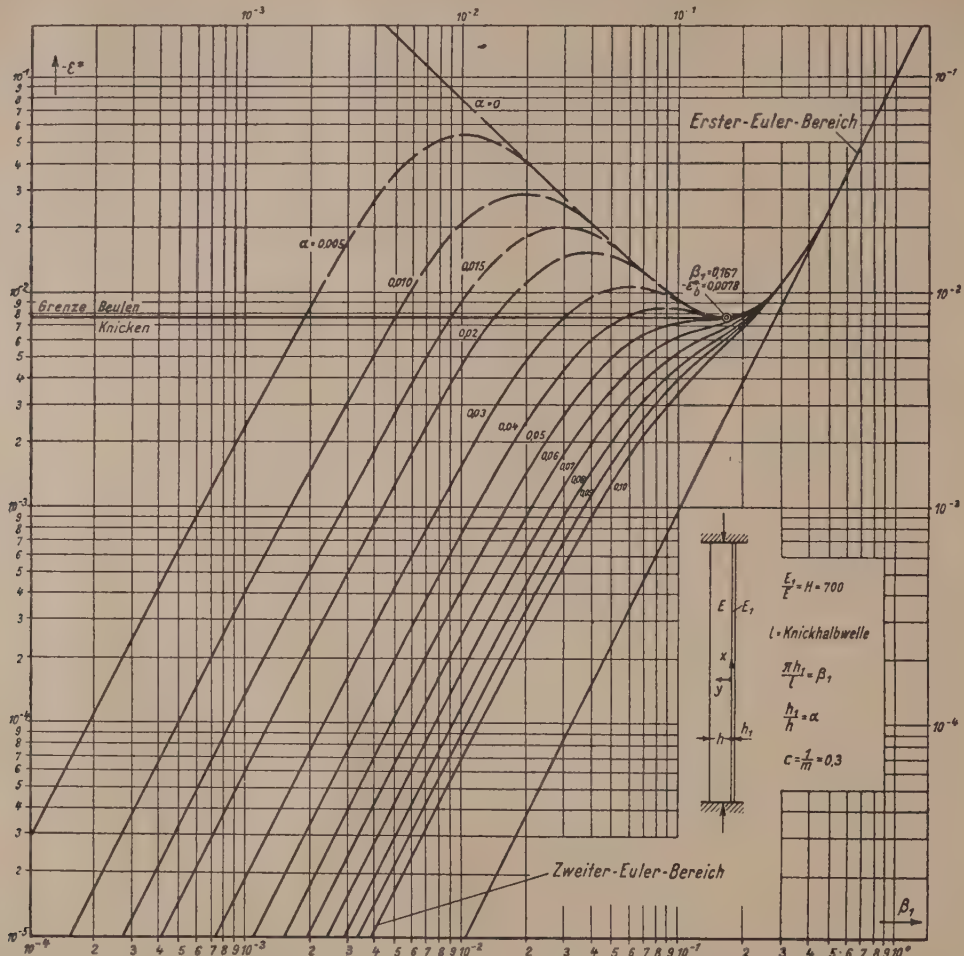


Bild 6. Kritische Stauchung der zwischichtigen Platte in Abhängigkeit von der reduzierten Wandstärke

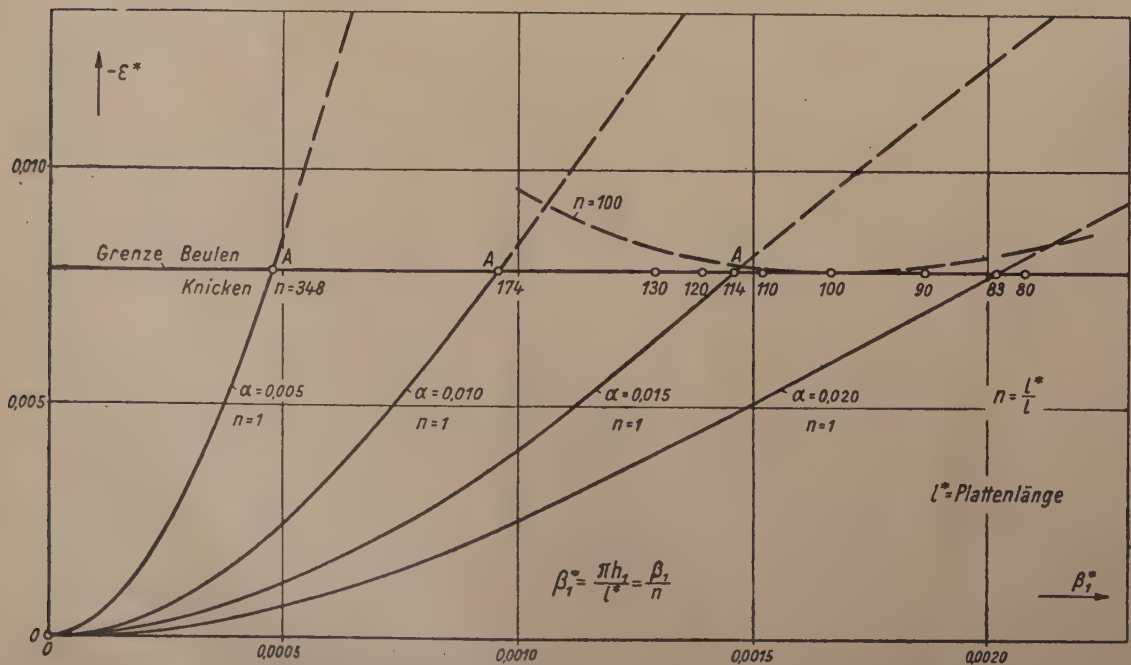


Bild 7. Kritische Zusammendrückung der dreischichtigen Platte in gewöhnlichem Maßstab



### 10. Das optimale Wandstärkenverhältnis

Zur Bestimmung der Tragfähigkeit der mehrschichtigen Platten war die Einführung einer dimensionslosen Hilfsgröße zweckmäßig, welche mit der Knicklast  $P$  in direktem Zusammenhang steht.

Ein solcher Kennwert ist die Größe

$$p = -\varepsilon^* \beta_1^* \left( H + \frac{1}{\alpha} \right) \dots \dots \dots (153).$$

Wird die Plattenbreite mit  $b$  bezeichnet, so gilt für die Knicklast der dreischichtigen Platte (Index 3):

$$P_3 = -\varepsilon^* (Eh + 2 E_1 h_1) b = -2 \varepsilon^* E h_1 \left( H + \frac{1}{\alpha} \right) b = \frac{2}{\pi} b l^* E p_3 \dots \dots (154)$$

bzw. — der zweischichtigen Platte (Index 2):

$$P_2 = -\varepsilon^* (Eh + E h_1) b = -\varepsilon^* E h_1 \left( H + \frac{1}{\alpha} \right) b = \frac{1}{\pi} b l^* E p_2 \dots \dots (155).$$

Bei linearem Formänderungsgesetz sind hierbei alle Größen, außer  $P$ ,  $p$  und  $\varepsilon^*$  Konstante, so daß  $P$  unmittelbar dem Kennwert  $p$  proportional ist. Bei nicht-linearem Formänderungsgesetz ist unter dem vereinfachenden Annahmen des Abschnittes 8 für  $E$  der Engessermodul  $d\sigma/d\varepsilon$  zu setzen, der seinerseits eine Funktion von  $\varepsilon$  und damit von  $p$  darstellt. Daher wird  $P$  in diesem Falle eine nicht-lineare Funktion von  $p$ , und zur Beurteilung der Tragfähigkeit muß statt  $p$  das Produkt  $p d\sigma/d\varepsilon$  benutzt werden. In den Diagrammen 8 und 9 ist für  $\gamma_1 = 16 \gamma$  der Kennwert  $p$  über  $\beta_1^*$  aufgetragen. Die zugehörigen Kurven  $\alpha = \text{konst}$  erfahren an der Beulgrenze einen Knick und verlaufen darüber hinaus gradlinig. In die so gewonnenen Diagramme wurden zur Entscheidung der Frage des Gewichtsoptimums Kurven eingezeichnet, längs denen ein für das Baugewicht  $Q$  der Platte maßgeblicher dimensionsloser Kennwert

$$q = \beta_1^* \left( \frac{\gamma_1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \right) \dots \dots \dots (156)$$

konstante Werte besitzt. Es folgt für das Baugewicht der dreischichtigen Platte (Index 3):

$$Q_3 = b l^* (\gamma h + 2 \gamma_1 h_1) = 2 b l^* \gamma h_1 \left( \frac{\gamma_1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{2}{\pi} b (l^*)^2 \gamma q_3 \dots \dots (157),$$

bzw. der zweischichtigen Platte (Index 2):

$$Q_2 = b l^* (\gamma h + \gamma_1 h_1) = b l^* \gamma h_1 \left( \frac{\gamma_1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\pi} b (l^*)^2 \gamma q_2 \dots \dots (158).$$

Demnach ist  $Q$  direkt proportional  $q$ , und alle Punkte einer Kurve  $q = \text{konst}$  entsprechen den Abmessungen gewichtsgleicher Platten. Die günstigste Ausführung ist mithin jene, zu welcher auf der zugehörigen Kurve  $q = \text{konst}$  der höchste Wert von  $P$ , d. h. bei linearem Formänderungsgesetz der höchste Wert von  $p$  gehört. Die Maxima der Kurven  $q = \text{konst}$  stellen daher die optimalen Ausführungsarten geschichteter Platten mit linearem Formänderungsgesetz dar. Die Verbindungslinie der Maxima wurde mit der Bezeichnung „Optimum“ versehen. Sie verläuft bei der dreischichtigen Platte (Bild 8) im zweiten Euler-Bereich gradlinig. Für größere  $\beta_1^*$ -Werte erreichen die Kurven  $q = \text{konst}$  die Beulgrenze und erfahren dort einen deutlich erkennbaren Knick, derart, daß die so entstehende Spitze zugleich dem Höchstwert und damit der jeweiligen Lage des Optimums entspricht. Die Optimumlinie fällt daher nach Erreichen der Beulgrenze mit dieser selbst zusammen.

Im zweiten Euler-Bereich läßt sich das optimale Wandstärkenverhältnis an Hand der Ausführungen des siebenten Abschnittes leicht herleiten.

Im zweiten Euler-Bereich der dreischichtigen Platte (Index 3) gilt nämlich wegen  $\beta_1 = \beta_1^*$  mit Bezug auf Gl. (141):

$$-\varepsilon_3^* = \frac{\frac{1}{3} + H \left( \alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \right)}{\left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) (1 + H \alpha) \alpha^2} (\beta_1^*)^3 \dots \dots \dots (159).$$

Entsprechend Gl. (153) wird

$$p_3 = \frac{\frac{1}{3} + H \left( \alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \right)}{\left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) \alpha^3} (\beta_1^*)^3 \dots \dots \dots (160).$$



Andererseits gilt für den Gewichtskennwert mit Bezug auf Gl. (156)

$$q = \beta_1^* \left( \frac{\gamma_1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (161).$$

Mithin gilt

$$\beta_1^* = \frac{q \alpha}{1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \alpha} \quad (162).$$

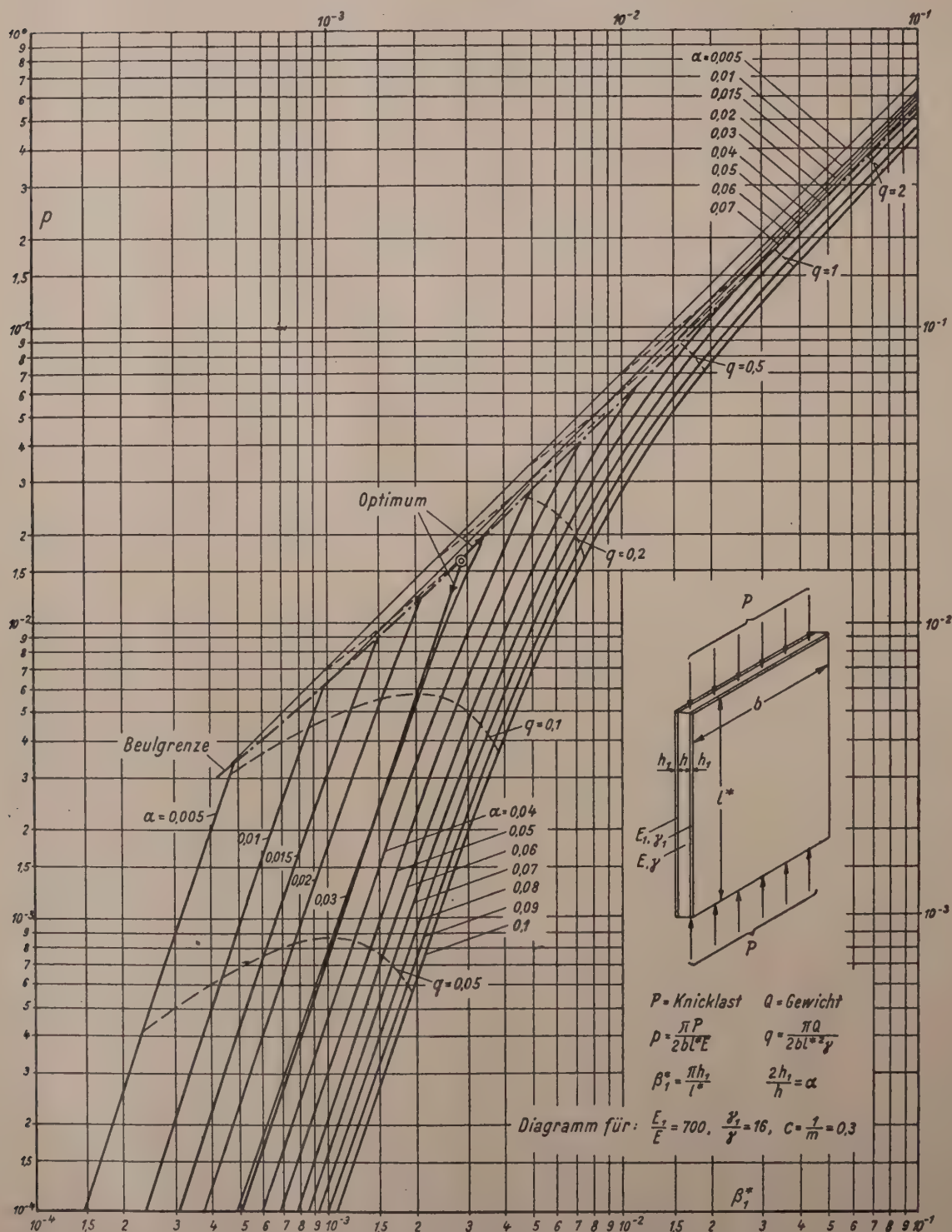


Bild 8. Reduzierte Knicklast der Gewichtskurven der dreischichtigen Platte



Wird diese Beziehung zur Elimination von  $\beta_1^*$  in Gl. (160) benutzt, so folgt für die dreischichtige Platte

$$p_3 = \frac{\left[ \frac{1}{3} + H \left( \alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \right) \right] q_3^3}{\left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \alpha \right)^3} \dots \dots \dots (163).$$

Bei konstanten  $q_3$  ist demnach  $p_3$  eine Funktion von  $\alpha$  allein. Das Maximum entspricht dem Verschwinden der Ableitung nach  $\alpha$ :

$$\left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \alpha \right) H (1 + 2\alpha + \alpha^2) - \left[ \frac{1}{3} + H \left( \alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \right) \right] 3 \frac{\gamma_1}{\gamma} = 0 \dots \dots \dots (164).$$

Die Auflösung führt auf die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 + 2\alpha + \frac{H - \frac{\gamma_1}{\gamma}}{H \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right)} = 0 \dots \dots \dots (165)$$

mit der positiven Wurzel

$$\alpha = -1 + \sqrt{\frac{(H-1)\gamma_1}{H(\gamma_1-\gamma)}}, \quad \text{bzw.} \quad \text{für} \quad H \gg 1, \quad \gamma_1 \gg \gamma: \quad \alpha = \frac{\gamma}{2\gamma_1} \quad (166).$$

Wie in Bild 8 ersichtlich ist, entspricht die für  $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 16$  eingezeichnete Optimumlinie im zweiten Euler-Bereich sehr genau dieser Formel.

Der Kennwert  $p_3$  erreicht für das optimale  $\alpha$  den Betrag

$$p_3 = \frac{(H-1)\gamma^3 q_3^3}{3 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) (\gamma_1 - \gamma) \left[ \gamma - \gamma_1 + \gamma_1 \sqrt{\frac{(H-1)\gamma_1}{H(\gamma_1-\gamma)}} \right]^2} \dots \dots \dots (167),$$

bzw. für  $H \gg 1$  und  $\gamma_1 \gg \gamma$ :

$$p_3 = \frac{4 H \gamma q_3^3}{27 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) \gamma_1} \dots \dots \dots (168).$$

Für die zweischichtige Platte (Index 2) gilt im zweiten Euler-Bereich entsprechende Gl. (144)

$$-\varepsilon_2^* = \frac{1 - H + H(1 + \alpha)^4 + H(H-1)\alpha^4}{12 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) (1 + H\alpha)^2 \alpha^2} (\beta_1^*)^2 \dots \dots \dots (169).$$

Mit Bezug auf Gl. (153) wird

$$p_2 = \frac{1 - H + H(1 + \alpha)^4 + H(H-1)\alpha^4}{12 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) (1 + H\alpha) \alpha^3} (\beta_1^*)^3 \dots \dots \dots (170)$$

Da für den Gewichtskennwert wieder Gl. (156) gilt, kann zur Elimination von  $\beta_1^*$  Gl. (159) benutzt werden. Dann ergibt sich

$$p_2 = \frac{1 - H + H(1 + \alpha)^4 + H(H-1)\alpha^4}{12 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) (1 - c) (1 + H\alpha) \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \alpha \right)^3} q_2^3 \dots \dots \dots (171).$$

Durch Nullsetzen der Ableitung nach  $\alpha$  folgt unter Weglassung der Zwischenrechnung eine symmetrische Gleichung vierten Grades für  $\alpha\sqrt{H}$ :

$$\left. \begin{aligned} & \left( H - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) [(\alpha\sqrt{H})^4 + 1] + 4\sqrt{H} \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) [(\alpha\sqrt{H})^3 + \alpha\sqrt{H}] \\ & + 2 \left[ H \left( 1 - \frac{2\gamma_1}{\gamma} \right) + 2 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right] \cdot (\alpha\sqrt{H})^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (172).$$



Da  $H$  sehr groß gegenüber 1 ist, wird die gesuchte Wurzel zweckmäßig in Form einer Entwicklung nach  $H$  dargestellt. Der Aufbau der Gl. (172) führt auf folgende Entwicklung:

$$\alpha = a \frac{1}{\sqrt{H}} + b \frac{1}{H} + c \frac{1}{H\sqrt{H}} + \dots \quad (173)$$

Durch Einsetzen in Gl. (172) folgt für  $a^2$  die quadratische Gleichung:

$$\alpha^4 + 2 \left( 1 - 2 \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \alpha^2 + 1 = 0 \quad (174)$$

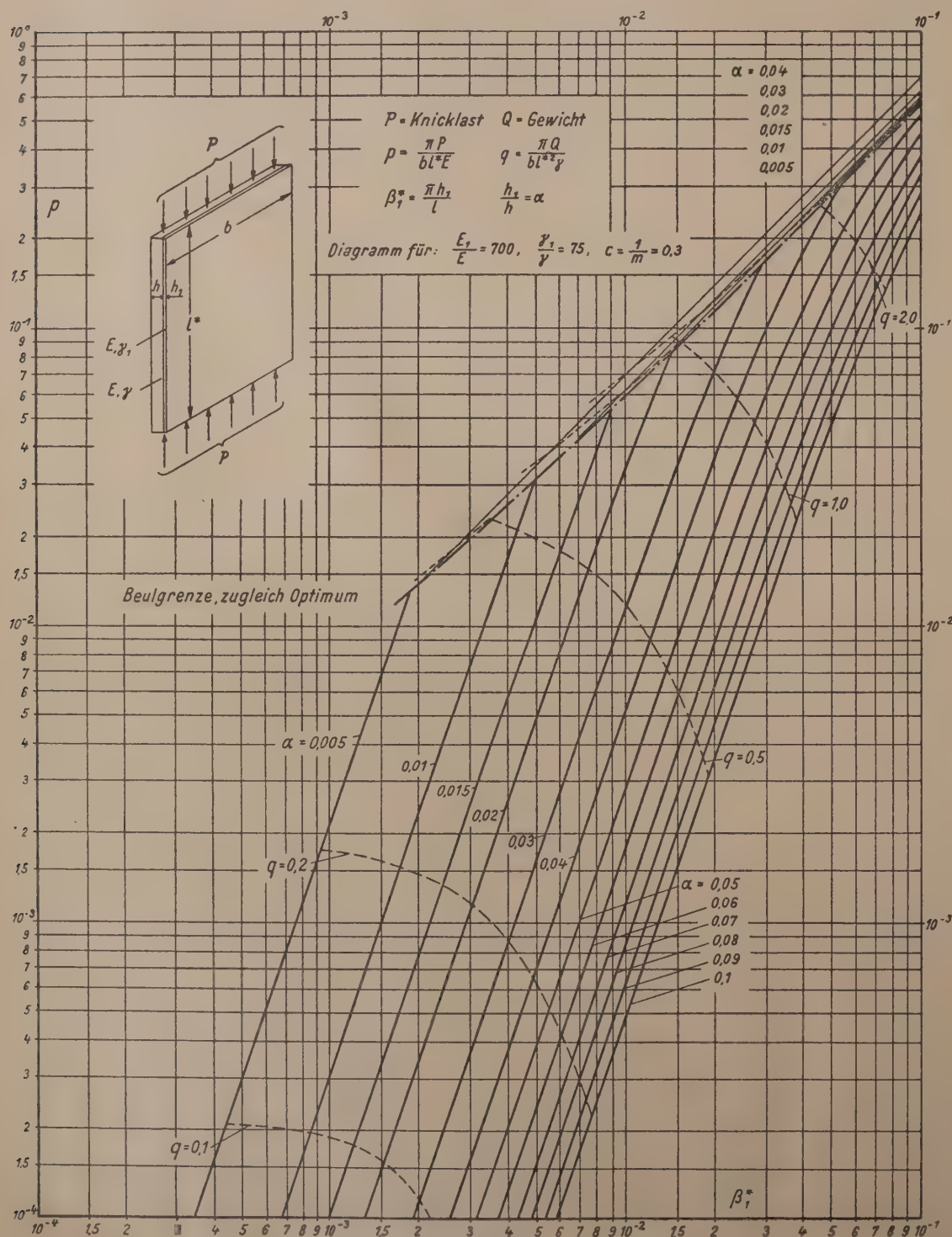


Bild 9. Reduzierte Knicklast und Gewichtskurven der zweischichtigen Platte

mit den positiv-reellen Wurzeln

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{2\gamma_1}{\gamma} - 1} \pm \sqrt{\left(\frac{2\gamma_1}{\gamma} - 1\right)^2 - 1} \quad (175).$$

Der maximalen Knicklast entspricht das untere Vorzeichen vor der zweiten Wurzel. Für  $H \gg 1$  und  $\gamma_1 \gg \gamma$  folgt mithin als optimales Wandstärkenverhältnis der zweischichtigen Platte im zweiten Eulerbereich

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{H\gamma_1}} \quad (176).$$

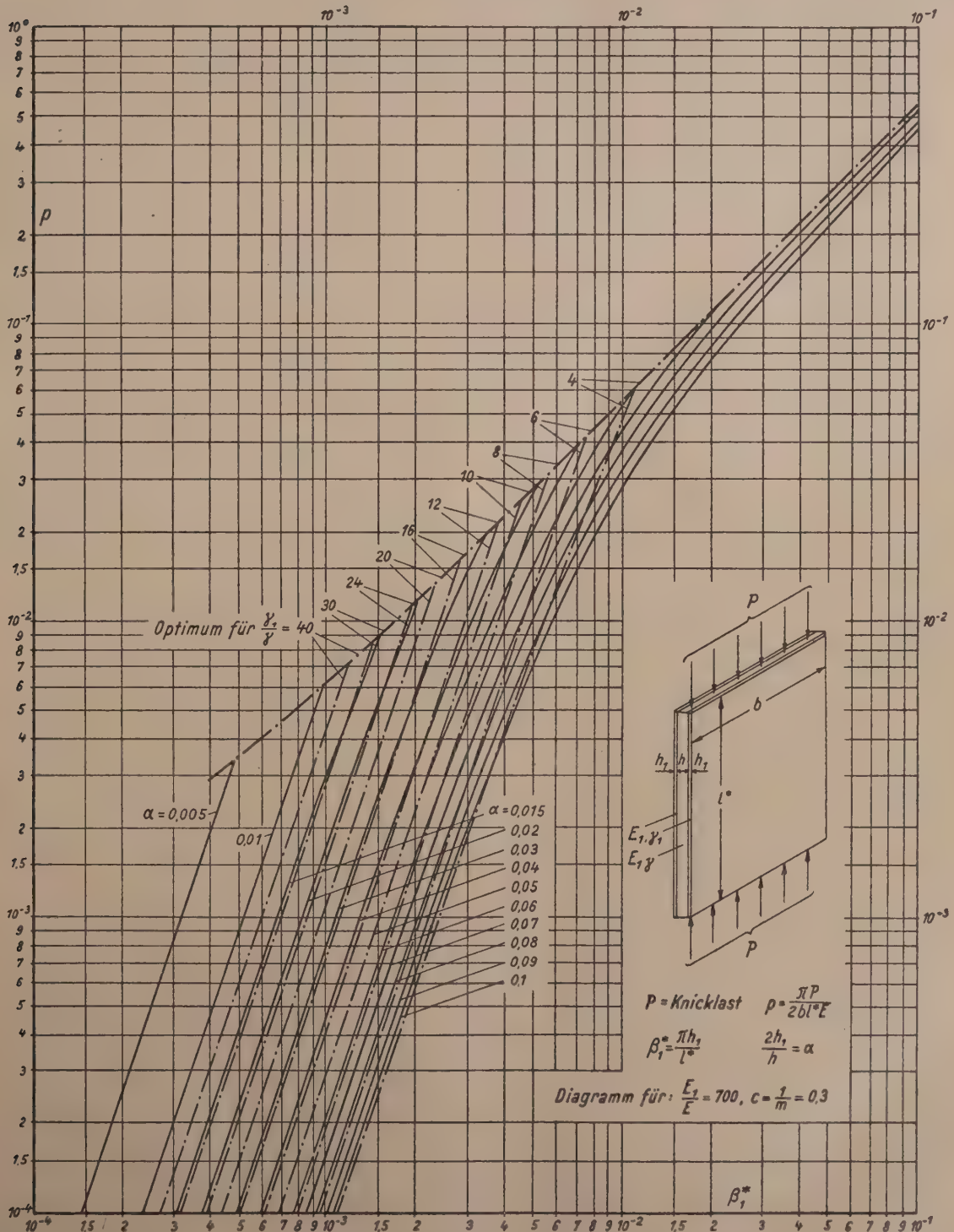


Bild 10. Optimumlinien der dreischichtigen Platte für verschiedene Gewichtsverhältnisse



Der zugehörige  $p$ -Wert ergibt sich aus Gl. (171). Bei Beschränkung auf den Sonderfall  $H \gg 1$ ,  $\gamma_1 \gg \gamma$  folgt nach kurzer Rechnung

$$p_2 = \frac{1 - 3 \sqrt{\frac{\gamma_1}{H\gamma}}}{3 \left(1 + \frac{1}{m}\right) (1 - c)} q_2^3 \dots \dots \dots (177).$$

Die Optimumlinie für die zweischichtige Platte wurde im Bild 9 für den zweiten Eulerbereich nicht mehr eingezeichnet, da sich herausstellte, daß die Beziehungen der zweiten Linearisierung für ihre exakte Ermittlung nicht ausreichen. Die im Bereich höherer  $\beta_1^*$ -Werte eingezeichneten  $p$ -Kurven zeigen wieder ausgeprägte Spitzen auf der Beulgrenze, die also hier wieder mit der Optimumlinie zusammenfällt. Bei abnehmenden  $\beta_1^*$  werden die Spitzen flacher, sodaß eine Abzweigung der Optimumlinie im zweiten Eulerbereich im Sinne der Gl. (176) und (177) als wahrscheinlich anzusehen ist.

Die Berechnungen der Optimalausführungen im zweiten Eulerbereich erlauben unmittelbar einen Vergleich der drei- und zweischichtigen Platte. Mit Hilfe der Beziehungen (154), (155), (157), (158), (168) und (177) folgt für das Verhältnis der Knicklasten bei gleichem Baugewicht ( $Q_2 = Q_3$ ) unter Umgehung der Zwischenrechnung

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{H\gamma}{9\gamma_1} \cdot \frac{1}{1 - 3 \sqrt{\frac{\gamma_1}{H\gamma}}} \dots \dots \dots (178).$$

Für  $H=700$  und  $\gamma_1=16\gamma$  ist demnach die Tragfähigkeit der dreischichtigen Platte im zweiten Eulerbereich etwa 9mal größer als die der zweischichtigen Platte. Im ersten Eulerbereich sind infolge des selbständigen Knickens des Bleches beide Ausführungen gleichwertig. Dieser Grenzfall wird jedoch in praktischen Fällen nicht erreicht. Im Zwischengebiet zeigen die Diagramme 8 und 9 stets die Überlegenheit der dreischichtigen Platte. Bild 10 zeigt die Optimumlinien für verschiedene Gewichtsverhältnisse.

Für nicht-lineares Formveränderungsgesetz sind die Diagramme 8, 9 und 10 für das Produkt  $p \, dq/d\varepsilon$  unter Berücksichtigung des mit  $\varepsilon$  veränderlichen Engessermoduls mit Bezug auf die genaue Formveränderungskurve des Werkstoffes aus Bild 5 und 6 neu zu entwickeln, wobei sich eine Verlagerung der Kurven  $q = \text{Konst}$  und damit der Optimumlinien ergeben kann.

Eingegangen: 24. November 1951.

## Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams

### II. Gleichungen zweiter und höherer Ordnung

Von *P. Matthieu* in Zürich/Berlin

*Die vom Verfasser kürzlich entwickelte neue Methode der Fehlerabschätzung wird auf Gleichungen höherer Ordnung ausgedehnt.*

*The new method of estimating the error given recently by the author is extended to equations of higher orders.*

*La nouvelle méthode de l'estimation des erreurs développée récemment par l'auteur est étendue sur des équations d'ordre supérieur.*

*Развитый автором недавно новый метод оценки ошибок распространяется на уравнения высшего порядка.*

#### 1. Einleitung

In einer kürzlich erschienenen ersten Arbeit<sup>1)</sup>, die hier als bekannt vorausgesetzt und im folgenden mit „I“ bezeichnet wird, wurde eine neue Methode der Fehlerabschätzung für das Verfahren von Adams zur Integration von Gleichungen erster Ordnung entwickelt. In der vorliegenden zweiten Arbeit (mit „II“ bezeichnet) wird gezeigt, daß sich diese Methode ohne wesentliche Änderungen auch auf die Integration sämtlicher Gleichungen höherer Ordnung ausdehnen läßt, ein Problem, das bis jetzt nie systematisch in Angriff genommen wurde. Es ergibt sich auf diese Weise eine sehr allgemeine und geschlossene Näherungstheorie für das Adams'sche Verfahren zur Integration beliebiger gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Der in I eingeschlagene Weg beruht im wesentlichen auf zwei wichtigen Prinzipien. Erstens wird zu einer gegebenen Gleichung erster Ordnung die zugehörige Fehlergleichung (I,21) auf-

<sup>1)</sup> *Matthieu, P.*: Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams, *Z. angew. Math. Mech.*, Bd. 31 (1951), S. 356–370.

gestellt, deren Lösung mit größter Näherung den Fehler darstellt. Zweitens kann die wesentliche Funktion  $q(x)$  in der Fehlergleichung (sie wird im folgenden als die infinitesimale Funktion der Fehlergleichung bezeichnet, da sie die Größenordnung der Differenzen  $\bar{\Delta}^{m+1} f_n^*$  mit  $n \geq m+1$  hat, wenn zur Interpolation Polynome vom Grade  $m$  verwendet werden) stets mit größter Leichtigkeit aus dem Differenzenschema abgeschätzt werden, wodurch sich dann sofort eine Abschätzung für den Fehler ergibt. Als weiteres wichtiges Resultat folgt aus diesen Betrachtungen ferner, daß sich der zunächst viel komplizierter scheinende Fall der mittelbaren Extrapolation ganz leicht auf den der unmittelbaren zurückführen läßt.

Alle diese Gedankengänge werden jetzt unmittelbar auf Gleichungen höherer Ordnung übertragen. Zunächst wird auf Grund der Methoden der Störungsrechnung wieder die zugehörige Fehlergleichung aufgestellt. In dieser tritt auch jetzt eine infinitesimale Funktion auf, welche mit größter Leichtigkeit aus dem Differenzenschema abgeschätzt werden kann, wodurch sich dann im Prinzip wieder eine Abschätzung für den Fehler ergibt. Weiterhin ergeben sich auch bei Gleichungen höherer Ordnung ganz einfache Beziehungen zwischen unmittelbarer und mittelbarer Extrapolation. Der Hauptunterschied gegenüber dem in I behandelten Fall liegt darin, daß jetzt die Fehlergleichung nicht mehr eine lineare Gleichung erster Ordnung ist, welche in geschlossener Form integriert werden kann, daß sie vielmehr linear von höherer Ordnung ist.

Obwohl die vorliegenden Betrachtungen ohne jegliche Schwierigkeit für den Fall durchgeführt werden können, daß Extrapolationspolynome beliebigen Grades verwendet werden, beschränken wir uns der Einfachheit halber wie in I auf Polynome dritten Grades. Wir gehen nun daran, die verschiedenen hierher gehörenden Fälle einzeln zu besprechen.

## 2. Gleichungen zweiter Ordnung bei unmittelbarer Extrapolation

Es sei eine reelle Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Gestalt

$$y'' = f(x, y, y') \quad \dots \dots \dots (1)$$

vorgelegt mit den Randbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \quad \dots \dots \dots (2).$$

Bezeichnet man wieder mit  $y^*(x)$  irgendeine Näherungslösung, welche nur den Randbedingungen (2) genügen soll und mit

$$\delta(x) = y(x) - y^*(x) \quad \dots \dots \dots (3)$$

den Fehler, so kann man genau nach dem gleichen Verfahren wie in I die Fehlergleichung aufstellen, die jetzt

$$\delta'' = \delta' \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y^*, y'^*) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*, y'^*) + f(x, y^*, y'^*) - y^{*''} \quad \dots \dots \dots (4)$$

lautet oder bei Einführung geeigneter Abkürzungen die (I,21) entsprechende Gestalt

$$\delta'' - r\delta' + p\delta + q \quad \dots \dots \dots (5)$$

annimmt. Hier hat die infinitesimale Funktion die Form

$$q(x) = f(x, y^*, y'^*) - y^{*''} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Diejenige Lösung von (5), die den Randbedingungen

$$\delta(x_0) = 0 \quad \delta'(x_0) = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

genügt, stellt auf Grund von (2) und (3) wieder mit großer Annäherung den Fehler dar, und es ist auch leicht, aus der Gestalt der gegebenen Gl. (1) die Zulässigkeit dieser Näherung abzuschätzen. Praktisch wird sie immer erlaubt sein.

Bei der Anwendung dieser allgemeinen Prinzipien auf das Verfahren von Adams ist wieder zu berücksichtigen, daß sich die Näherung  $y^*(x)$  aus einzelnen Teilen zusammensetzt, die fortlaufend für die verschiedenen Intervalle gebildet werden. Die Bildung der einzelnen Teile erfolgt ganz entsprechend wie in I durch Verwendung des Differenzenschemas<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Vgl. die folgenden Werke: Willers, Fr. A.: Methoden der praktischen Analysis, 2. Aufl. Berlin 1950, S. 372ff. — Sanden, H. v.: Praxis der Differentialgleichungen, 3. Aufl. Berlin 1945, S. 48ff. — Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin 1951, S. 68—86. — Collatz, L.: Differenzenverfahren zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung. Z. angew. Math. Mech., Bd. 29.



$$\left. \begin{array}{cccc} x_0 & y_0^* & y_0^* & f_0^* \\ & & & \bar{\Delta} f_1^* \\ x_1 & y_1^* & y_1^* & f_1^* \\ & & & \bar{\Delta} f_2^* & \bar{\Delta}^2 f_2^* \\ x_2 & y_2^* & y_2^* & f_2^* \\ & & & \bar{\Delta} f_3^* & \bar{\Delta}^2 f_3^* & \bar{\Delta}^3 f_3^* \\ x_3 & y_3^* & y_3^* & f_3^* \\ & & & \bar{\Delta} f_4^* & \bar{\Delta}^2 f_4^* & \bar{\Delta}^3 f_4^* & \bar{\Delta}^4 f_4^* \\ x_4 & y_4^* & y_4^* & f_4^* \\ & & & \bar{\Delta} f_5^* & \bar{\Delta}^2 f_5^* & \bar{\Delta}^3 f_5^* \\ x_5 & y_5^* & y_5^* & f_5^* \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8),$$

von dem wieder die ersten Werte vorausberechnet werden müssen. Wie in I machen wir die Voraussetzung (von der man sich nötigenfalls auch sofort befreien kann), daß diese Anfangswerte nicht merklich von der exakten Lösung abweichen. An Stelle von (I,25) bis (I,28) treten jetzt unter Verwendung entsprechender Bezeichnungen für  $n > 3$  die Gleichungen <sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} Y_n^{**}(x) = F_{n-1}(x) = f_{n-1}^* + \frac{\bar{\Delta} f_{n-1}^*}{1!} u_{n-1} + \frac{\bar{\Delta}^2 f_{n-1}^*}{2!} u_{n-1}(u_{n-1} + 1) \\ + \frac{\bar{\Delta}^3 f_{n-1}^*}{3!} u_{n-1}(u_{n-1} + 1)(u_{n-1} + 2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (9),$$

$$\left. \begin{aligned} Y_n^{**'}(x) = y_{n-1}^{*'} + h [f_{n-1}^* u_{n-1} + (6 \bar{\Delta} f_{n-1}^* + 3 \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + 2 \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^*) \frac{u_{n-1}^2}{12} \\ + (\bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^*) \frac{u_{n-1}^3}{6} + \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \frac{u_{n-1}^4}{24}] \end{aligned} \right\} (10),$$

$$\left. \begin{aligned} Y_n^*(x) = y_{n-1}^* + h y_{n-1}^{*'} u_{n-1} + h^2 \left[ \frac{f_{n-1}^*}{2} u_{n-1}^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{\bar{\Delta} f_{n-1}^*}{6} + \frac{\bar{\Delta}^2 f_{n-1}^*}{12} + \frac{\bar{\Delta}^3 f_{n-1}^*}{18} \right) u_{n-1}^3 \right. \\ \left. + (\bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^*) \frac{u_{n-1}^4}{24} + \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \frac{u_{n-1}^5}{120} \right] \end{aligned} \right\} (11),$$

$$y_n^{*'} = Y_n^{*'}(x_n) = y_{n-1}^{*'} + h \left[ f_{n-1}^* + \frac{1}{2} \bar{\Delta} f_{n-1}^* + \frac{5}{12} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \frac{3}{8} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \right] \dots (12),$$

$$\left. \begin{aligned} y_n^* = Y_n^*(x_n) = y_{n-1}^* + h y_{n-1}^{*'} \\ + h^2 \left[ \frac{f_{n-1}^*}{2} + \frac{1}{6} \bar{\Delta} f_{n-1}^* + \frac{1}{8} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \frac{19}{180} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \right] \end{aligned} \right\} (13),$$

von denen zur Fortsetzung des Schemas (8) nur die beiden letzten gebraucht werden, während die drei ersten für die Fehlerabschätzung von Bedeutung sind.

Aus (9) bis (11) ergibt sich weiterhin gemäß (6) sofort die infinitesimale Funktion  $q(x)$  im  $n$ -ten Intervall für  $n > 3$  (für  $n \leq 3$  verschwindet  $q(x)$  nach den gemachten Voraussetzungen identisch) in der Form

$$\left. \begin{aligned} q(x) = f(x, Y_n^*(x), Y_n^{*'}(x)) - F_{n-1}(x) \\ = f(x, Y_n^*(x), Y_n^{*'}(x)) - f(x, y(x), y'(x)) - [Y_n^{**}(x) - y''(x)] \end{aligned} \right\} \dots \dots (14),$$

für die man leicht entsprechend (I,32) und (I,33) im  $n$ -ten Intervall die Beziehungen

$$q(x_{n-1}) = 0 \quad q(x_n) = \bar{\Delta}^4 f_n^* \dots \dots \dots (15)$$

herleitet. Aber auch die Schlüsse, die in I gezogen wurden betreffend den monoton ansteigenden und nach oben konkaven Verlauf von  $q(x)$  in jedem Intervall können unverändert übernommen werden, denn der wesentliche Term in (14) ist wiederum der eckige Klammerausdruck, der von vierter Ordnung in  $h$  ist, während der übrig bleibende Ausdruck die 5. Ordnung hat und sich sogar von dem entsprechenden früheren Ausdruck nur um Glieder 6. Ordnung unterscheidet. Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß  $q(x)$  auch für Gleichungen höherer Ordnung genau dieselben Eigenschaften hat wie sie in I für Gleichungen erster Ordnung hergeleitet wurden. Es verläuft zackenförmig vom Werte Null am Anfang des  $n$ -ten Intervalls ( $n > 3$ ) bis zum Werte  $\bar{\Delta}^4 f_n^*$

an dessen Ende (vgl. Bild 1), und der Verlauf wird im wesentlichen, d. h. bis auf Glieder höherer Ordnung gegeben durch

$$q(x) = \bar{\Delta}^4 f_n \left( \frac{1}{4} u_{n-1} + \frac{11}{24} u_{n-1}^2 + \frac{1}{4} u_{n-1}^3 + \frac{1}{24} u_{n-1}^4 \right) \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \quad 0 \leq u_{n-1} \leq 1 \quad (16).$$

Auch die Möglichkeiten der strengen Kontrolle für den Verlauf von (16) übertragen sich unmittelbar auf den jetzigen Fall. Entsprechend den Gleichungen (I,47) bis (I,49) leitet man jetzt aus (9) bis (11) z.B. für die Mitte des  $n$ -ter Intervalles ( $n > 3$ ) sofort die Formeln ab

$$y_{n-1/2}^* = y_{n-1}^* + \frac{h}{2} y_{n-1}^{*\prime} + h^2 \left[ \frac{1}{8} f_{n-1}^* + \frac{1}{48} \bar{\Delta} f_{n-1}^* + \frac{5}{384} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \frac{113}{11520} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \right] \quad (17),$$

$$y_{n-1/2}^{*\prime} = y_{n-1}^{*\prime} + h \left[ \frac{1}{2} f_{n-1}^{*\prime} + \frac{1}{8} \bar{\Delta} f_{n-1}^{*\prime} + \frac{1}{12} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^{*\prime} + \frac{25}{384} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^{*\prime} \right] \dots \dots \dots (18),$$

$$y_{n-1/2}^{*\prime\prime} = f_{n-1}^{*\prime\prime} + \frac{1}{2} \bar{\Delta} f_{n-1}^{*\prime\prime} + \frac{3}{8} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^{*\prime\prime} + \frac{5}{16} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^{*\prime\prime} \dots \dots \dots (19),$$

$$q_{n-1/2} = f(x_{n-1/2}, y_{n-1/2}^*, y_{n-1/2}^{*\prime}) - y_{n-1/2}^{*\prime\prime} \dots \dots \dots (20).$$

Die Formeln (18) und (19) stimmen im wesentlichen mit (I,47) und (I,48) überein. Andere Zwischenwerte ergeben sich ganz entsprechend aus (9) bis (11).

Es handelt sich nun weiterhin darum, auf Grund der eben hergeleiteten Eigenschaften von  $q(x)$  gemäß der Fehlergleichung (5) eine Abschätzung für den Fehler zu finden. Hierbei bieten sich vor allem zwei Möglichkeiten dar. Man kann erstens von der allgemeinen Lösung der zu (5) gehörenden homogenen Gleichung ausgehen, die man in manchen Fällen in geschlossener Form, stets jedoch approximativ bestimmen kann, wobei im letzteren Fall sehr rohe und einfache Methoden, z.B. graphische<sup>3)</sup>, genügen. Sind dann  $\delta_1(x)$  und  $\delta_2(x)$  irgend zwei linear unabhängige Lösungen dieser homogenen Gleichung, so stellt sich der Fehler  $\delta(x)$  als Lösung von (5) und (7) vom vierten Intervall an (in den drei ersten verschwindet  $\delta(x)$  nach Voraussetzung identisch) bekanntlich in der Form dar<sup>4)</sup>

$$\delta(x) = \delta_1(x) \int_{x_3}^x \frac{q(\xi) \delta_2(\xi)}{\delta_2 \delta_1' - \delta_1 \delta_2'} d\xi - \delta_2(x) \int_{x_3}^x \frac{q(\xi) \delta_1(\xi)}{\delta_2 \delta_1' - \delta_1 \delta_2'} d\xi \dots \dots \dots (21).$$

Für den Nenner in den Integranden gilt dabei die Identität

$$\delta_2(\xi) \delta_1'(\xi) - \delta_1(\xi) \delta_2'(\xi) = \left| \frac{\delta_1'(\xi) \delta_2'(\xi)}{\delta_1(\xi) \delta_2(\xi)} \right| = C e^{\int_{x_3}^{\xi} r(\xi) d\xi} \dots \dots \dots (22),$$

wobei  $C$  eine Konstante ist, die von  $\delta_1(x)$  und  $\delta_2(x)$  abhängt und aus (22) leicht bestimmt werden kann, z.B. indem man  $\xi = x_3$  setzt. Führt man noch die Abkürzung ein

$$D(x, \xi) = \left| \frac{\delta_1(x) \delta_2(x)}{\delta_1(\xi) \delta_2(\xi)} \right| \dots \dots \dots (23),$$

so läßt sich (21) auf Grund von (22) und (23) auch in der übersichtlichen Gestalt

$$\delta(x) = \frac{1}{C} \int_{x_3}^x q(\xi) e^{-\int_{x_3}^{\xi} r(\xi) d\xi} D(x, \xi) d\xi \dots \dots \dots (24)$$

schreiben. Diese Form hat überdies den Vorteil, daß sie sich unverändert auch auf Gleichungen höherer Ordnung übertragen läßt (vgl. dazu Abschnitt 5).

Aus (24) folgt nun sofort die (I,51) entsprechende Abschätzung

$$|\delta(x)| < \bar{\delta}(x) = \frac{1}{|C|} \int_{x_3}^x \bar{q}(\xi) e^{-\int_{x_3}^{\xi} r(\xi) d\xi} |D(x, \xi)| d\xi = \int_{x_3}^x \frac{\bar{q}(\xi)}{|\delta_2 \delta_1' - \delta_1 \delta_2'|} |D(x, \xi)| d\xi \quad (25).$$

<sup>3)</sup> Vgl. die folgenden Werke: Runge, C. und König, H.: Vorlesungen über numerisches Rechnen, 1. Aufl. Berlin 1924, 10. Kapitel. — Sanden, H. v.: Praxis der Differentialgleichungen, 3. Aufl. Berlin 1945, S. 41—48. — Runge, C.: Graphische Methoden, Leipzig und Berlin 1915, § 16. — Hütte: 27. Aufl., S. 203—205.

<sup>4)</sup> Vgl. z.B. Frank, P. und Mises, R. v.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl. 1930, S. 298—300. Ferner Forsyth, A. R.: Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2. Aufl. Braunschweig 1912, S. 119ff.



Wählt man die mittlere Majorante  $\bar{q}(x)$  wie in I, S. 364 so, daß sie ungefähr in halber Höhe der Zackenspitzen von  $\bar{q}(x)$  verläuft (Bild 1) und wechseln  $D(x, \xi)$  und  $q(x)$  im ganzen Integrationsintervall das Vorzeichen nicht, so folgt wieder aus (16), daß die Fehlerschranke stets etwa das Anderthalbfache des Betrages des wirklichen Fehlers ist, während sich das Vorzeichen aus (24) und (22) ergibt.

Im folgenden erweist es sich als bequem, neben der mittleren Majorante  $\bar{q}(x)$  für  $|q(x)|$  noch in genau analoger Weise eine mittlere Majorante  $\bar{q}_M(x)$  für  $q(x)$  einzuführen, ebenso eine mittlere Minorante  $\bar{q}_m(x)$ . Falls  $q(x) \geq 0$ , kann z. B.  $\bar{q}_M(x) = \bar{q}(x)$  und  $\bar{q}_m(x) \equiv 0$  gesetzt werden, bei negativem  $q(x)$  dagegen  $\bar{q}_M(x) \equiv 0$  und  $\bar{q}_m(x) = -\bar{q}(x)$ . Es sind aber auch engere derartige Schranken denkbar. Setzt man  $\bar{q}_M(x)$  an Stelle von  $q(x)$  in die Fehlergleichung (5) ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$\bar{\delta}_M'' = r \bar{\delta}_M' + p \bar{\delta}_M + \bar{q}_M, \quad \bar{\delta}_M'(x_0) = \bar{\delta}_M(x_0) = 0 \quad \dots \quad (26)$$

dessen Lösung  $\bar{\delta}_M(x)$  gemäß (24) in der Gestalt

$$\bar{\delta}_M(x) = \frac{1}{C} \int_{x_0}^x \bar{q}_M(\xi) e^{-\int_{x_0}^{\xi} r(\xi) d\xi} D(x, \xi) d\xi \quad \dots \quad (27)$$

dargestellt werden kann. In genau gleicher Weise kann man auch  $\bar{q}_m(x)$  in (5) einsetzen, wodurch eine Lösung  $\bar{\delta}_m(x)$  definiert wird. Falls die Funktion

$$\frac{1}{C} D(x, \xi) \quad \text{bzw.} \quad C D(x, \xi) \quad \dots \quad (28)$$

bei beliebigen Werten von  $x$  und  $\xi$  innerhalb des Integrationsintervalls stets positiv bleibt, gilt dann, wie man aus (24) unmittelbar erkennt, die Fehlerabschätzung

$$\bar{\delta}_m(x) < \delta(x) < \bar{\delta}_M(x) \quad \dots \quad (29).$$

Wenn umgekehrt (28) stets negativ ist, sind in (29) die beiden Schranken zu vertauschen.

In dem eben genannten Falle, daß  $D(x, \xi)$  im Integrationsintervall stets das gleiche Vorzeichen hat, können die Formeln (25) und (29) unmittelbar zur Fehlerabschätzung verwendet werden. Bei Kenntnis von  $\delta_1(x)$  und  $\delta_2(x)$  kann das Vorzeichen von  $D(x, \xi)$  direkt festgestellt werden. Weiterhin ist (28) nach einem nächstens (S. 30—31) auszusprechenden Satz stets positiv, wenn  $p(x)$  im Integrationsintervall überall  $\geq 0$  ist. Bei der Abschätzung wird man sich natürlich wieder geeigneter, z. B. graphischer Methoden bedienen<sup>5)</sup>. Natürlich kann man auch den Integranden oder Teile von ihm durch irgendwelche Majoranten ersetzen, wodurch man zu sehr einfachen Abschätzungen gelangen kann. Oft wird man auch die rechte Seite von (25) entsprechend (21) wieder in zwei Summanden zerlegen und mit diesen einzeln rechnen.

Wenn dagegen  $D(x, \xi)$  das Vorzeichen wechselt, braucht (29) bzw. die entsprechende Formel bei negativem Wert (28) nicht mehr richtig zu sein, während (25) zwar noch richtig bleibt, aber nicht mehr einfach zu berechnen ist. Man greift dann am besten auf (21) bzw. (24) zurück, aber in diesen Gleichungen führt jetzt die Ersetzung von  $q(x)$  durch eine Majorante oder Minorante nicht mehr notwendigerweise zu einer Majorante oder Minorante für  $\delta(x)$ . Man kann aber in diesem Fall dadurch zum Ziel kommen, daß man in (21) und (24) gleichzeitig mit Majoranten oder Minoranten arbeitet. Die leichten Überlegungen führen in Verbindung mit den bisherigen Resultaten zu folgender Regel:

*Wenn  $D(x, \xi)$  im ganzen Integrationsintervall stets das gleiche Vorzeichen hat, benutzt man für die Fehlerabschätzung am besten die Formeln (25) und (29). Andernfalls erhält man dadurch eine Majorante für  $\delta(x)$ , daß man in (21) bzw. (24) überall dort, wo die Ausdrücke  $C \delta_1(x) \delta_2(\xi) q(\xi)$  und  $-C \delta_2(x) \delta_1(\xi) q(\xi)$  positiv bzw. negativ sind,  $q(\xi)$  durch  $\bar{q}_M(\xi)$  bzw.  $\bar{q}_m(\xi)$  ersetzt. In ganz entsprechender Weise kann man auch eine Minorante für  $\delta(x)$  herleiten.*

Die zweite Methode der Fehlerabschätzung beruht darauf, daß man die Fehlergleichung direkt löst oder ihre Lösung abschätzt. Falls  $p(x)$  im Integrationsintervall positiv ist (der Fall eines negativen  $p(x)$  wird im 6. Abschnitt behandelt), stützt man sich dabei am besten auf das folgende Theorem:

*Es sei eine reelle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Anfangsbedingungen in der Gestalt*

$$y'' = f_1(x) y' + f_2(x) y + g(x), \quad y(a) = c, \quad y'(a) = d \quad \dots \quad (30)$$

*gegeben, und es sei ferner im Intervall  $a \leq x \leq b$   $f_2(x) \geq 0$ . Wenn man dann zu (30) ein Gleichungssystem der Form*

$$Y'' = f_1(x) Y' + f_2(x) Y + G(x), \quad Y(a) = C, \quad Y'(a) = D \quad \dots \quad (31)$$

<sup>5)</sup> Außerdem kann man  $\delta(x)$  auch wieder in tabellarischer Form berechnen wie in I, S. 366. Es soll dies hier jedoch nicht ausgeführt werden.

bildet mit  $G(x) \geq g(x), \quad C \geq c, \quad D \geq d \quad \dots \dots \dots (32),$

so ist die Lösung  $Y(x)$  eine Majorante der früheren Lösung  $y(x)$ . Es gilt also

$$Y(x) \geq y(x), \quad a \leq x \leq b \quad \dots \dots \dots (33).$$

In ganz entsprechender Weise läßt sich auch eine Minorante für die Lösung herleiten, indem man  $q(x)$  durch eine Minorante ersetzt und die Anfangswerte verkleinert.

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man am besten, wenn man (30) durch das lineare Gleichungssystem

$$z' = f_1(x)z + f_2(x)y + g(x), \quad y' = z, \quad y(a) = c, \quad z(a) = d \quad \dots \dots (34)$$

ersetzt, die entsprechende Umformung für (31) vornimmt und den Verlauf der Funktionen  $y(x)$  und  $z(x)$  mit demjenigen der entsprechenden Funktionen  $Y(x)$  und  $Z(x)$  vergleicht. Man erkennt dann, daß es nicht möglich ist, daß  $Z(x)$  irgendwo kleiner wird als  $z(x)$ . Denn wenn die Kurve  $Z(x)$  an einer Stelle die Kurve  $z(x)$  erreicht, so folgt aus (34) und der entsprechenden Umformung von (31) sofort, daß sie sich von da an wieder über  $z(x)$  erheben muß oder im Grenzfall mit ihr zusammenfällt. Für den Fall einer Minorante verläuft der Beweis genau analog. Dieses wichtige Theorem läßt sich ohne Schwierigkeiten auch auf Gleichungen höherer Ordnung übertragen. Es muß dann vorausgesetzt werden, daß alle Koeffizienten mit Ausnahme desjenige des zweithöchsten Gliedes  $\geq 0$  sind.

Die Anwendung auf unseren Fall ist unmittelbar. Ersetzen wir die Fehlergleichung (5) durch (26), so stellt nach dem obigen Satz die Lösung  $\bar{\delta}_M(x)$  eine Majorante für den Fehler dar. In gleicher Weise bestimmt sich auch die Minorante  $\bar{\delta}_m(x)$ , so daß man den Verlauf des Fehlers gemäß (29) beherrscht. Bei dieser zweiten Methode wird jetzt also  $\bar{\delta}_M(x)$  nicht mehr gemäß (27) berechnet, sondern durch direkte Lösung von (26) bestimmt, wobei wieder die einfachsten und primitivsten Methoden Verwendung finden können<sup>3)</sup>. Entsprechendes gilt natürlich für  $\bar{\delta}_m(x)$ . Zusammenfassend kann man also sagen:

Ist  $p(x)$  im Integrationsintervall überall positiv, so stellen die Lösungen  $\bar{\delta}_M(x)$  und  $\bar{\delta}_m(x)$  gemäß (29) stets Schranken für den Fehler dar.

### 3. Beispiel zur Fehlerabschätzung bei unmittelbarer Extrapolation

Die Gleichung  $y'' + 2y' + y = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$  soll im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  nach Adams integriert werden, und es soll der dabei begangene Fehler abgeschätzt werden.

Die Lösung kann für die Anfangswerte wieder sehr rasch und genau durch Potenzreihen berechnet werden. Das Schema (8) nimmt dann, in analoger Weise wie bei dem in I, Abschnitt 5 berechneten Beispiel, die Gestalt (35) an. Ferner wurde, obwohl das für die Fehlerabschätzung

$x_n$	$y_n^*$	$y_n^{*'}$	$f_n^*$	$10^7 \bar{\Delta} f_n^*$	$10^7 \bar{\Delta}^2 f_n^*$	$10^7 \bar{\Delta}^3 f_n^*$	$10^7 \bar{\Delta}^4 f_n^*$
—0,1	—0,1105171	1,2156880	—2,3208589	3208589			
0,0	0,0000000	1,0000000	—2,0000000	2808089	—400500	47168	
0,1	0,0904837	0,8143537	—1,7191911	2454757	—353332	41439	—5729
0,2	0,1637462	0,6549846	—1,4737154	2142864	—311893	37638	—3801
0,3	0,2222460	0,5185915	—1,2594290	1868609	—274255	32552	—5086
0,4	0,2681305	0,4022188	—1,0725681	1626906	—241703	29309	—3243
0,5	0,3032707	0,3033034	—0,9098775	1414512	—212394	25518	—3791
0,6	0,3292960	0,2195652	—0,7684263	1227636	—186876	22884	—2634
0,7	0,3476227	0,1490200	—0,6456627	1063644	—163992	19994	—2890
0,8	0,3594803	0,0899090	—0,5392983	919646	—143998	17848	—2146
0,9	0,3659339	0,0406999	—0,4473337	793496	—126150		
1,0	0,3679046	0,0000397	—0,3679841				

. . (35)



nicht notwendig ist, die Funktion  $|q(x)|$  berechnet. Sie ist, gleichzeitig mit  $\bar{q}(x)$  und einer geeigneten Funktion  $\bar{\bar{q}}(x)$ , in Bild 1 dargestellt. Die Berechnung ist dort sogar bis  $x = 2,0$  weitergeführt. Man erkennt daraus durch Vergleich mit I, Bild 1 den völlig analogen Verlauf der beiden Funktionen  $q(x)$ , wie er im vorigen Abschnitt theoretisch erschlossen wurde.

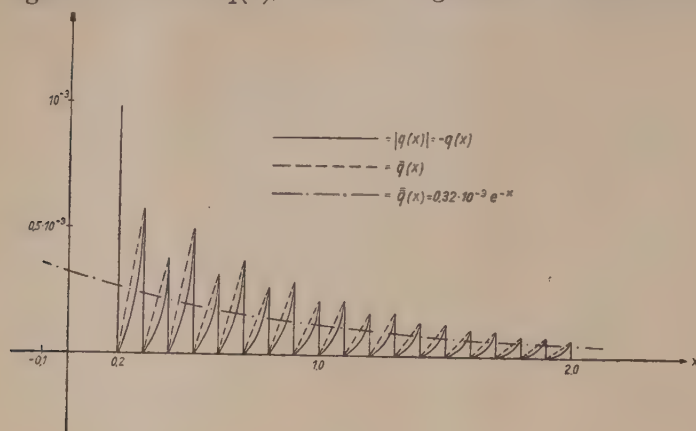


Bild 1

Aus dem Schema (35) kann nun weiterhin der Fehler abgeschätzt werden. Es soll dies, da einerseits die Fehlergleichung

$$\left. \begin{aligned} \delta'' &= -2\delta' - \delta + q, \\ \delta(0,2) &= \delta'(0,2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

in geschlossener Form lösbar ist und andererseits  $p(x)$  negativ ist, nach der ersten der beiden an-

gegebenen Methoden geschehen. Die zu (36) gehörende homogene Gleichung hat die beiden partikulären Integrale

$$\delta_1(x) = e^{-x}, \quad \delta_2(x) = x e^{-x} \quad \dots \dots \dots (37).$$

Daraus folgt gemäß (23) die Beziehung

$$D(x, \xi) = -(x - \xi) e^{-(x+\xi)} \quad \dots \dots \dots (38).$$

Demgemäß hat  $D(x, \xi)$  im ganzen Integrationsintervall das negative Vorzeichen, und es kann also die Abschätzung (25) verwendet werden. Man erhält gemäß (25)

$$|\delta(x)| \leq \bar{\delta}(x) = \int_{0,2}^x \bar{q}(\xi) (x - \xi) e^{\xi-x} d\xi \quad \dots \dots \dots (39).$$

Gemäß (24) und (22) erkennt man weiter, daß der Fehler das gleiche Vorzeichen hat wie  $q(x)$ , d. h. wie die Differenzen  $\bar{\Delta}^4 f_n^*$ , also negativ ist. Um seinen Beitrag zu berechnen, muß man in (39) für  $\bar{q}(x)$  eine geeignete Majorante einsetzen. Wir wählen

$$\bar{q}(x) = 0,32 \cdot 10^{-3} e^{-x} \quad \dots \dots \dots (40),$$

was nach Bild 1 eine sehr geeignete Majorante darstellt und erhalten damit die Abschätzung (39) in der Form

$$\left. \begin{aligned} |\delta(x)| &< \bar{\delta}(x) = 0,32 \cdot 10^{-3} e^{-x} \int_{0,2}^x (x - \xi) d\xi \\ &= 0,32 \cdot 10^{-3} e^{-x} \left( \frac{x^2}{2} - 0,2x + 0,02 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (41).$$

Damit ist die gesuchte Fehlerabschätzung bereits gefunden. Für  $x = 1$  erhält man  $\bar{\delta}(1) = 0,377 \cdot 10^{-4}$ . Demgegenüber hat der wirkliche Fehler den Betrag  $\delta(1) = -0,252 \cdot 10^{-4}$ . Die Schranke beträgt also tatsächlich etwa das Anderthalbfache des Fehlerbetrages. Statt auf dem angegebenen analytischen Wege kann man natürlich auch auf andere Weise, z.B. graphisch zum Ziel kommen.

#### 4. Gleichungen zweiter Ordnung bei mittelbarer Extrapolation; Beispiel

Hier können die Überlegungen von I, Abschnitt 6 fast unverändert übernommen werden, nachdem auf S. 28—29 erkannt wurde, daß die infinitesimale Funktion  $q(x)$  bei Gleichungen zweiter Ordnung in Bezug auf das Differenzenschema die gleiche Gestalt hat wie bei Gleichungen erster Ordnung. Bei unmittelbarer Extrapolation äußert sich diese Übereinstimmung in der Gleichheit der Formeln (16) und (I,45). Aber auch bei unmittelbarer müssen die entsprechenden Formeln gleich lauten, und die genannten Entwicklungen von I übertragen sich also unmittelbar auf den jetzigen Fall.

Entsprechend der iterativen Verbesserung sind jetzt die aus (12) und (13) hervorgehenden Werte nur als erste Näherungswerte  $y_{n,0}^*$  und  $y_{n,0}^*$  zu betrachten. Aus diesen werden unter

Beibehaltung der gleichen Bezeichnungsweise wie in I die verbesserten Werte

$$y_{n,1}' = y_{n-1}' + h \left[ f_{n,0}^* - \frac{1}{2} \bar{\Delta} f_{n,0}^* - \frac{1}{12} \bar{\Delta}^2 f_{n,0}^* - \frac{1}{24} \bar{\Delta}^3 f_{n,0}^* \right] \dots \dots (42)$$

und

$$y_{n,1}^* = y_{n-1}^* + h y_{n-1}' + h^2 \left[ \frac{1}{2} f_{n,0}^* - \frac{1}{3} \bar{\Delta} f_{n,0}^* - \frac{1}{24} \bar{\Delta}^2 f_{n,0}^* - \frac{7}{360} \bar{\Delta}^3 f_{n,0}^* \right] (43)$$

abgeleitet, welche in derselben Weise weiter verbessert werden bis sich die neu entstehenden Werte nicht mehr ändern<sup>6)</sup>. Auch hier können die Formeln (42) und (43) für den praktischen Gebrauch noch wesentlich vereinfacht werden<sup>6)</sup>. Entsprechend dieser Iteration besteht jetzt die Funktion  $q(x)$  wieder aus einzelnen Kurvenbögen, die sich in den Intervallendpunkten stetig aneinander schließen (vgl. Bild 2) und denen analytisch gewisse Funktionen  $Q_n(x)$  entsprechen (vgl. I, Bild 3). Dabei bestehen, immer unter Verwendung derselben Schreibweise wie in I, die Beziehungen

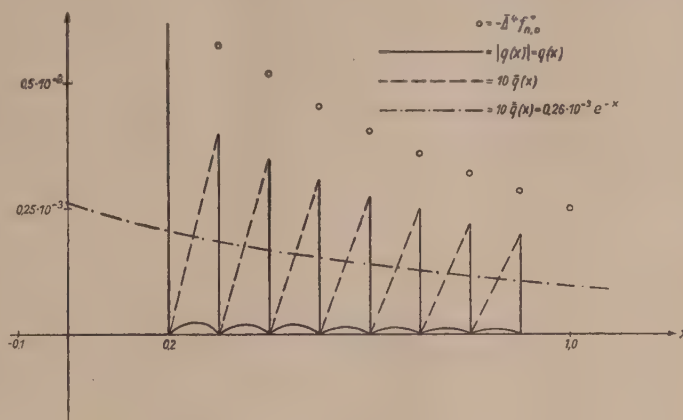


Bild 2

$$Q_n(x_{n-1}) = 0, \quad Q_n(x_n) = 0, \quad Q_n(x_{n+1}) = \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^* \dots \dots \dots (44)$$

und

$$q(x) = \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^* \left( \frac{1}{4} u_n + \frac{11}{24} u_n^2 + \frac{1}{4} u_n^3 + \frac{1}{24} u_n^4 \right), \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n, \quad -1 \leq u \leq 0 \quad (45)$$

Die Übereinstimmung von (44) und (45) mit (I,66) und (I,68) stellt den mathematischen Ausdruck dar für die eben erwähnte gleiche Gestalt der Funktion  $q(x)$  bei Gleichungen erster und zweiter Ordnung.

Mit der gemäß (45) bestimmten Funktion  $q(x)$  kann man nun in derselben Weise weiter rechnen wie mit der früheren Funktion (16). Speziell können die Abschätzungen (25) und (29) unmittelbar übernommen werden, wenn darin nur für  $q(x)$  die Funktion (45) eingesetzt wird. Dabei geht man am besten wie in I, S. 12 so vor, daß man eine Funktion  $\bar{q}(x)$  definiert, die in den dreiersten Intervallen verschwindet, während sie für  $n > 3$  vom Werte Null am Anfang des  $n$ -ten Intervalles in gerader Linie bis zum Wert  $\frac{19}{241} |\bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^*|$  an seinem Ende ansteigen soll. Die un-  
stetige Funktion  $\bar{q}(x)$  ersetzen wir dann gemäß (I,50) wieder durch eine mittlere Majorante  $\bar{\bar{q}}(x)$ . Dann können wir unsere Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

Die in Abschnitt 2 ausgesprochenen Abschätzungsregeln können ohne weiteres auch auf den Fall der mittelbaren Extrapolation übertragen werden. Dabei sind einzig die Differenzen  $\bar{\Delta}^4 f_n^*$  durch die Werte  $-\frac{19}{241} \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^*$  (angenähert  $-\frac{1}{13} \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^*$ ) zu ersetzen, bzw. es ist die Definition von  $\bar{q}(x)$  und  $\bar{\bar{q}}(x)$  in der eben genannten Weise abzuändern.

Die Formeln für die strenge Kontrolle können entsprechend (17) bis (20) sofort aus (9) bis (11) abgeleitet werden, was jedoch hier nicht explizite durchgeführt werden soll. Ferner ergibt sich wie in I durch Vergleich von (16) und (45) die folgende interessante und wichtige Aussage:

*Auch bei Gleichungen zweiter Ordnung ist das Adams'sche Verfahren bei mittelbarer Extrapolation stets rund 13 Mal genauer als bei unmittelbarer.*

Schließlich soll zur Erläuterung dieser Methoden das Beispiel von Abschnitt 3 durch mittelbare Extrapolation gelöst werden. Das (I,70) entsprechende Differenzenschema nimmt dann die Gestalt (46) an, welche gemäß Fußnote<sup>6)</sup> auf vereinfachte Weise berechnet wurde<sup>7)</sup>. Maßgebend

<sup>6)</sup> Vgl. dazu Willers, Fr. A.: Methoden der praktischen Analysis, 2. Aufl. Berlin 1950, S. 372—374; oder Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin, 1951, S. 77 ff.

<sup>7)</sup> In der ursprünglichen Rechnung wurden die Werte auf 8 Stellen nach dem Komma genau berechnet, woraus dann (46) durch Rundung der letzten Stelle hervorgeht. Auch in Wirklichkeit wurde nicht nur zweimal sondern viermal iteriert, was der Einfachheit halber in (46) weggelassen ist. Die beiden in (46) angegebenen Iterationen stellen die durch einmalige und durch viermalige Iteration hervorgehenden Werte dar. Aus diesen Vereinfachungen erklären sich gelegentliche Abweichungen in den letzten Stellen von (46). An unseren Überlegungen kann dies selbstverständlich nichts ändern.



für die Fehlerabschätzung sind die Differenzen  $\bar{\Delta}^4 f_{n,0}^*$ . Sie sind in Bild 2 als Punkte eingetragen. Damit können nun die Funktionen  $\bar{q}(x)$  und  $\bar{q}'(x)$  bestimmt werden (Bild 2). Auch die (für die Fehlerabschätzung nicht nötige) Funktion  $q(x)$  wurde interessehalber berechnet und in dieselbe Abbildung eingetragen. Für  $\bar{q}(x)$  wurde die Gestalt

$$\bar{q}(x) = 0,26 \cdot 10^{-4} e^{-x} \dots \dots \dots (47)$$

$x_n$	$y_{n,i}^*$	$y_{n,i}'$	$f_{n,i}^*$	$10^7 \bar{\Delta}^2 f_{n,i}^*$	$10^7 \bar{\Delta}^2 f_{n,i}^*$	$10^7 \bar{\Delta}^3 f_{n,i}^*$	$10^7 \bar{\Delta}^4 f_{n,0}^*$
—0,1	—0,1105171	1,2156880	—2,3208589				
				3208589			
0,0	0,0000000	1,0000000	—2,0000000		—400500		
				2808089		47168	
0,1	0,0904837	0,8143537	—1,7191911		—353332		—5729
				2454757		41439	
0,2	0,1637462	0,6549846	—1,4737154		—311893		
				2142864			
0,3	0,2222460	0,5185915	—1,2594290			41844	
	0,2222454	0,5185700	—1,2593854		—311488		—5185
				2143269		36659	
	0,2222454	0,5185716	—1,2593885		—274829		
				1868440			
0,4	0,2681283	0,4022081	—1,0725445			37026	
	0,2681278	0,4021886	—1,0725051		—274462		—4517
				1868807		32509	
	0,2681278	0,4021900	—1,0725078		—241953		
				1626854			
0,5	0,3032653	0,3032785	—0,9098224			32828	
	0,3032649	0,3032616	—0,9097881		—241634		—4047
				1627173		28781	
	0,3032649	0,3032628	—0,9097905		—212853		
				1414320			
0,6	0,3297867	0,2195359	—0,7683585			29067	
	0,3292862	0,2195207	—0,7683277		—212567		—3600
				1414606		25667	
	0,3292863	0,2195218	—0,7683299		—187100		
				1227506			
0,7	0,3476091	0,1489652	—0,6455794			25721	
	0,3476087	0,1489717	—0,6455520		—186846		—3197
				1227760		22524	
	0,3476087	0,1489726	—0,6455539		—164322		
				1063438			
0,8	0,3594622	0,0898740	—0,5392101			22750	
	0,3594818	0,0898620	—0,5391858		—164096		—2836
				1063664		19914	
	0,3594619	0,0898628	—0,5391875		—144182		
				919482			
0,9	0,3659114	0,0406640	—0,4472393			20114	
	0,3659111	0,0406533	—0,4472177		—143982		—2521
				919682		17593	
	0,3659111	0,0406541	—0,4472192		—126389		
				793293			
1,0	0,3678778	0,0000061	—0,3678900				
	0,3678775	—0,0000034	—0,3678707				
	0,36787756	—0,00000273					

Genaue Werte:  $y(1, 0) = 0,36787944$  und  $y'(1, 0) = 0,00000000$

angenommen, welche sehr angenähert in halber Höhe der Spitzen von  $\bar{q}(x)$  verläuft. Damit kann nun genau die entsprechende Rechnung durchgeführt werden wie im Beispiel von Abschnitt 3. Der einzige Unterschied gegenüber diesem letzteren besteht darin, daß an Stelle von (40) jetzt die dazu proportionale Funktion (47) tritt. Infolgedessen verändert sich auch das Resultat (41) in demselben Verhältnis, und wir erhalten für den Fehler die Abschätzung

$$|\delta(x)| < \bar{\delta}(x) = 0,26 \cdot 10^{-4} e^{-x} \left( \frac{x^2}{2} - 0,2x + 0,02 \right) \dots \dots \dots (48).$$

Für  $x=1$  hat man z. B.  $\bar{\delta}(1) = 0,306 \cdot 10^{-5}$ . Dieser Schranke steht der wirkliche Fehler  $\delta(1) = 0,188 \cdot 10^{-5}$  gegenüber. Das Verhältnis ist also wieder ungefähr 3/2. Das Vorzeichen des Fehlers bestimmt sich auch hier aus (21), wobei jetzt  $q(x)$ , wie immer bei mittelbarer Extrapolation, das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie die Differenzen  $\bar{A}^4 f_{n,0}^*$ . Schließlich findet man auch die oben ausgesprochene Regel bestätigt, daß das Resultat bei mittelbarer Extrapolation stets rund 13 Mal genauer ist als bei unmittelbarer.

### 5. Gleichungen höherer Ordnung

Hier treten keine neuen Gesichtspunkte mehr auf, und es genügt wohl, die sich ergebenden Resultate am Beispiel der Gleichung dritten Grades kurz zu skizzieren. Bei einer Gleichung dritter Ordnung

$$y''' = f(x, y, y', y'') \dots \dots \dots (49)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0 \dots \dots \dots (50)$$

lautet die zu einer Näherungslösung  $y^*(x)$  gehörende Fehlergleichung entsprechend (4)

$$\left. \begin{aligned} \delta''' &= \delta'' \frac{\partial f}{\partial y''}(x, y^*, y^{*'}, y^{*''}) + \delta' \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y^*, y^{*'}, y^{*''}) \\ &+ \delta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*, y^{*'}, y^{*''}) + f(x, y^*, y^{*'}, y^{*''}) - y^{*'''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

oder in abgekürzter Schreibweise analog zu (5)

$$\delta''' = s\delta'' + r\delta' + p\delta + q \dots \dots \dots (52)$$

wozu noch die Anfangsbedingungen

$$\delta(x_0) = 0 \quad \delta'(x_0) = 0 \quad \delta''(x_0) = 0 \dots \dots \dots (53)$$

hinzukommen. Bei der Integration nach Adams ist wieder zu berücksichtigen, daß sich  $y^*(x)$  aus den einzelnen Teilen  $Y_n^*(x)$  zusammensetzt, die für  $n > 3$  in Verbindung mit dem zugehörigen Differenzenschema fortlaufend für die verschiedenen Intervalle gebildet werden<sup>8)</sup>. Dabei wird  $Y_n^{*'''}(x)$  in genau gleicher Weise aus dem Differenzenschema abgeleitet wie (9) aus (8). Die rechte Seite von (9) stellt demnach bei Gleichungen dritter Ordnung die dritte Ableitung des Extrapolationspolynoms  $Y_n^*(x)$  dar, aus der sich dieses letztere und seine beiden ersten Ableitungen durch einfache Integrationen ergeben, genau wie (10) und (11) aus (9). Die rechten Seiten von (10) und (11) stellen jetzt also die Ableitungen  $Y_n^{*''}(x)$  und  $Y_n^{*'}(x)$  dar, während zur Berechnung von  $Y_n^*(x)$  eine nochmalige Integration nötig ist.

Mit  $Y_n^*(x)$  und seinen Ableitungen kann nun weiterhin vor allem die Funktion  $q(x)$  gebildet werden. Die Berechnung erfolgt in ganz analoger Weise wie dies auf S. 28—29 für Gleichungen zweiter Ordnung durchgeführt wurde. Speziell ergibt sich auch bei Gleichungen dritter Ordnung für  $q(x)$  wieder die Gestalt (16) bzw. bei mittelbarer Extrapolation die Form (45). Dieselben Schlüsse lassen sich auch für Gleichungen höherer Ordnung ziehen, und wir können also das folgende allgemeine Prinzip für unsere Fehlerabschätzung aussprechen:

*Eine beliebige gewöhnliche Differentialgleichung sei nach Adams integriert. Dann bestimmt sich der dabei begangene Fehler aus der Fehlergleichung, welche entsprechend (4), (5), (51) und (52) in elementarer Weise aus der gegebenen Gleichung abgeleitet werden kann. Die in der Fehlergleichung als Störungsglied auftretende infinitesimale Funktion  $q(x)$  hat bei allen Gleichungen in erster Näherung die Form (16) bzw. bei mittelbarer Extrapolation die Form (45) und kann im übrigen mit großer Leichtigkeit genau berechnet oder abgeschätzt werden. Die übrigen in der Fehlergleichung auftretenden Funktionen ergeben sich sofort aus der Lösung der Differentialgleichung. Man erhält dann eine Abschätzung für den Fehler, indem man die Fehlergleichung integriert oder ihre Lösung abschätzt, was je*

<sup>8)</sup> Vgl. die unter 4) genannten Werke.



nach ihrer Gestalt in geschlossener Form oder approximativ erfolgen kann. Dabei stehen sehr verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, deren wichtigste vorstehend und in I besprochen wurden. Auch die bei diesen Rechnungen gemachten Vernachlässigungen können stets kontrolliert werden, so daß diese Methoden als vollständig streng betrachtet werden können.

Weiterhin folgt ganz allgemein:

Bei sämtlichen Differentialgleichungen führt die Integration nach *Adams* bei mittelbarer Extrapolation zu rund 13 Mal genaueren Resultaten als bei unmittelbarer.

Auch die beiden Methoden zur Lösung bzw. Abschätzung der Fehlergleichung, wie sie für Gleichungen zweiter Ordnung angegeben wurden, können unmittelbar übernommen werden. Bei der ersten (S. 29—30) muß wiederum zuerst das allgemeine Integral der homogenen Gleichung bestimmt werden. Sind z.B.  $\delta_1(x)$ ,  $\delta_2(x)$  und  $\delta_3(x)$  drei linear unabhängige Integrale der zu (52) gehörenden homogenen Gleichung, so stellt sich die Lösung der Fehlergleichung (52) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (53) entsprechend (24) in der Form dar

$$\delta(x) = \frac{1}{C} \int_{x_3}^x q(\xi) e^{-\int_{x_3}^{\xi} s(\xi) d\xi} D(x, \xi) d\xi \quad \dots \quad (54),$$

wobei  $D(x, \xi)$  jetzt analog zu (23) eine Abkürzung ist für

$$D(x, \xi) = \begin{vmatrix} \delta_1(x) & \delta_2(x) & \delta_3(x) \\ \delta_1'(\xi) & \delta_2'(\xi) & \delta_3'(\xi) \\ \delta_1(\xi) & \delta_2(\xi) & \delta_3(\xi) \end{vmatrix} \quad \dots \quad (55)$$

und wobei  $C$  wiederum eine Konstante ist, die von der Wahl von  $\delta_1(x)$ ,  $\delta_2(x)$  und  $\delta_3(x)$  abhängt<sup>9)</sup>. Die Identität, gemäß welcher dies je der Fall ist, lautet jetzt entsprechend (22)

$$\begin{vmatrix} \delta_1''(\xi) & \delta_2''(\xi) & \delta_3''(\xi) \\ \delta_1'(\xi) & \delta_2'(\xi) & \delta_3'(\xi) \\ \delta_1(\xi) & \delta_2(\xi) & \delta_3(\xi) \end{vmatrix} = C e^{-\int_{x_3}^{\xi} s(\xi) d\xi} \quad \dots \quad (56).$$

Sie kann wiederum leicht zur Berechnung von  $C$  dienen.

Aus (54) folgt dann die (25) entsprechende Abschätzung

$$|\delta(x)| < \bar{\delta}(x) = \frac{1}{|C|} \int_{x_3}^x \bar{q}(\xi) e^{-\int_{x_3}^{\xi} s(\xi) d\xi} |D(x, \xi)| d\xi \quad \dots \quad (57).$$

Für sie gelten die gleichen Bemerkungen wie für (25), wobei wiederum das Vorzeichen von  $D(x, \xi)$  eine ausschlaggebende Rolle spielt. Ganz entsprechende Verhältnisse bestehen für Gleichungen höherer Ordnung. All dies soll jedoch hier nicht mehr näher ausgeführt werden, da dieser Lösungsweg bereits von der dritten Ordnung an praktisch recht kompliziert wird.

Sehr einfach ist dagegen die Übertragung der zweiten Methode der Fehlerabschätzung, wie sie S. 30—31 entwickelt wurde. Bei Gleichungen dritter Ordnung erhält man an Stelle von (26) das Gleichungssystem

$$\bar{\delta}_M'' = s\bar{\delta}_M' + r\bar{\delta}_M + p\bar{\delta}_M + \bar{q}_M, \quad \bar{\delta}_M''(x_0) = \bar{\delta}_M'(x_0) = \bar{\delta}_M(x_0) = 0 \quad \dots \quad (58).$$

Macht man hier zunächst die Annahme, daß  $p(x)$  und  $r(x)$  im Integrationsintervall positiv sind (die übrigen Fälle werden im nächsten Abschnitt behandelt), so können wir aus dem auf S. 30 bis 31 ausgesprochenem Theorem, das sich in ganz analoger Weise auch für Gleichungen höherer Ordnung formulieren läßt, sofort schließen, daß die Lösung  $\bar{\delta}_M(x)$  wieder eine Majorante ist für den Fehler  $\delta(x)$ . Genau entsprechend liegen die Verhältnisse bei Gleichungen  $n$ . Ordnung.

## 6. Die zweite Abschätzungsmethode im allgemeinen Fall

Die zweite der beiden Methoden, die in einer direkten Integration der Fehlergleichung besteht und die im Prinzip die einfachere und ansprechendere ist, ist nach den bisherigen Ausführungen bei Gleichungen zweiter Ordnung auf den Fall  $p(x) \geq 0$  beschränkt, während bei Gleichungen höherer Ordnung noch mehr solche Ungleichungen hinzutreten. Wenn diese Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind, ergeben sich wesentlich neue Verhältnisse. Das auf S. 30—31 ausgesprochene Theorem gilt dann nicht mehr. Tatsächlich erkennt man aus (24) und (54) sofort,

<sup>9)</sup> Vgl. z.B. Forsyth, A. R.: Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2. Aufl. Braunschweig 1912, § 75, insbes. Beispiel 1.

daß im allgemeinen Fall (nämlich dann, wenn  $D(x, \xi)$  das Vorzeichen wechselt) eine Majorisierung von  $q(x)$  in der Fehlergleichung nicht mehr eine solche der Lösung zur Folge zu haben braucht, wie das bei Bestehen der genannten Ungleichungen gefolgert werden konnte. Es sind demnach in diesem Falle neue Gesichtspunkte heranzuziehen. Als wichtigste Methoden der Fehlerabschätzung ergeben sich dabei die folgenden:

a) Oft ist es möglich, die Fehlergleichung (5) durch eine einfache Umformung in eine lineare Gleichung mit  $p(x) \geq 0$  überzuführen. Z. B. kann das Gleichungssystem

$$\delta'' = -\delta + q(x), \quad \delta(0) = \delta'(0) = 0 \quad \dots \dots \dots (59)$$

im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  durch die Substitution

$$\delta = u \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \dots \dots (60)$$

übergeführt werden in

$$u'' = -2 u' \cotg \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{q}{\sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)} \quad u(0) = u'(0) = 0 \quad \dots \dots (61).$$

Für große Intervalle ist (60) jedoch nicht mehr brauchbar, da dann die Koeffizienten unstetig werden.

Auch das Beispiel von Abschnitt 3 kann auf diese Weise berechnet werden. Die Fehlergleichung (36) geht durch die Substitution

$$\delta = u e^{-x} \quad \dots \dots \dots (62)$$

über in

$$u'' = q e^x \quad u(0,2) = u'(0,2) = 0 \quad \dots \dots \dots (63).$$

Ersetzt man hier  $q$  wieder durch die Majorante (40), so kommt man genau auf die frühere Lösung (41) zurück. Im Gegensatz zu (61) ist (63) für beliebige Intervalle brauchbar.

b) Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man die Fehlergleichung (5) zunächst durch  $\delta' = \varepsilon$  in ein lineares Gleichungssystem erster Ordnung überführt und dann in diesem Linearkombinationen von  $\delta$  und  $\varepsilon$  als neue Veränderliche einführt. Z. B. kann man in dem aus (59) hervorgehenden linearen Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} \delta' = \varepsilon \\ \varepsilon' = -\delta + q(x) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \delta(0) = 0 \\ \varepsilon(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (64)$$

die neuen Veränderlichen  $v$  und  $w$  einführen durch

$$\delta = \varphi(x)v + \psi(x)w, \quad \varepsilon = \chi(x)v + \omega(x)w \quad \dots \dots \dots (65)$$

mit zunächst unbekannten Funktionen  $\varphi(x), \psi(x), \chi(x), \omega(x)$ . Es folgt dann für  $v$  und  $w$  das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} (\omega\varphi - \psi\chi)v' = (\omega\chi - \omega\varphi' + \varphi\psi + \chi'\psi)v + (\omega^2 - \psi'\omega + \psi^2 + \omega'\psi)w - q\psi \\ (\omega\varphi - \psi\chi)w' = (-\varphi^2 - \chi'\varphi - \chi^2 + \varphi'\chi)v + (-\varphi\psi - \varphi\omega' - \chi\omega + \psi'\chi)w + \varphi q \\ v(0) = 0 \quad w(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (66).$$

Hier ist es offenbar auf mannigfache Weise möglich, die obigen Funktionen so zu wählen, daß der Koeffizient von  $w$  in der oberen Gleichung, derjenige von  $v$  in der unteren sowie der bei den Ableitungen stehende Koeffizient alle  $\geq 0$  werden. Z. B. kann man

$$\varphi = \cos x, \quad \psi = \sin x, \quad \chi = -\sin x, \quad \omega = \cos x \quad \dots \dots (67)$$

setzen, wodurch (66) die Gestalt

$$v' = -q \sin x, \quad v(0) = 0, \quad w' = q \cos x, \quad w(0) = 0 \quad \dots \dots (68)$$

annimmt. Ersetzt man hier die rechten Seiten  $-q \sin x$  und  $q \cos x$  durch Majoranten bzw. Minoranten, so ergeben sich durch Integration der entstehenden Gleichungen solche für  $v$  und  $w$  sowie schließlich durch Vermittlung von (65) Majoranten und Minoranten für  $\delta$  und  $\varepsilon$ , wie das der Leser selbst im einzelnen ausführen möge. Damit ist die Fehlerabschätzung geleistet.

Die vorstehend am Beispiel von (59) ausgeführte Methode kann in gleicher Weise auch auf den Fall der allgemeinen Gleichung zweiter und höherer Ordnung ausgedehnt werden. Dabei läßt sich vor allem an Hand von (24) und (54) unschwer einsehen, daß man stets auf mannigfache Weise solche linearen Kombinationen von  $\delta$  und seinen Ableitungen als neue Veränderliche einführen kann, daß bei dem entstehenden linearen Gleichungssystem die notwendigen Unglei-



chungen erfüllt sind. Jedoch soll dieser zunächst außerordentlich naheliegend und vielversprechend erscheinende Weg hier trotzdem nicht weiter verfolgt werden, da es dem Verfasser bisher nicht gelungen ist, ihn trotz seiner theoretischen Einfachheit zu einer wirklich brauchbaren Methode auszubauen.

c) Ein praktisch sehr geeigneter Weg besteht dagegen darin, daß man die Fehlergleichung ein oder mehrere Male ableitet, die so entstehenden Gleichungen mit geeigneten (konstanten oder veränderlichen) Faktoren multipliziert und sie schließlich addiert. Man erhält dann eine neue Gleichung für den Fehler. Diese ist zwar von höherer Ordnung, jedoch kann man versuchen, die genannten Faktoren so zu wählen, daß die in Frage stehenden Ungleichungen erfüllt sind. Dabei sind natürlich auch die Anfangsbedingungen auf die Gleichung höherer Ordnung zu übertragen.

Eine kleine Schwierigkeit ergibt sich dabei noch dadurch, daß  $q(x)$  als unstetige Funktion an den Sprungstellen nicht differenzierbar ist. Diese kann aber leicht dadurch überwunden werden, daß man  $q(x)$  durch eine stetig verlaufende Funktion  $K(x)$  ersetzt, welche  $q(x)$  unter Vermeidung der Zacken im Mittel möglichst gut approximiert, genau wie  $\bar{q}(x)$  durch  $\bar{\bar{q}}(x)$  approximiert wird, wenn in (I,50) das Gleichheitszeichen steht.  $K(x)$  kann dabei als sehr rohe Annäherung gewählt werden, wie das nächstens noch deutlicher ersichtlich wird. Eine solche kann stets leicht gefunden werden.

Ist nun wieder z.B. die Gl. (59) vorgelegt, so ergeben sich durch zweimalige Ableitung die Differentialgleichung

$$\delta'''' = -\delta'' + K'' = \delta - K + K'' \quad \dots \dots \dots (69)$$

sowie die Anfangswerte

$$\delta''(0) = K(0) \quad \delta'''(0) = K'(0) \quad \dots \dots \dots (70).$$

Damit kann also (59) ersetzt werden durch das Gleichungssystem

$$\delta'''' = \delta - K + K'', \quad \delta(0) = \delta'(0) = 0, \quad \delta''(0) = K(0), \quad \delta'''(0) = K'(0) \quad (71),$$

bei welchem die fraglichen Vorzeichenbedingungen erfüllt sind. Ersetzt man nun in (71) die Funktion  $-K(x) + K''(x)$  und die Anfangswerte  $0, 0, K(0), K'(0)$  durch irgendwelche Majoranten (wozu sehr rohe Abschätzungen genügen), so ist die Lösung  $\delta_K(x)$  des so entstehenden Gleichungssystems eine Majorante für den Fehler. In gleicher Weise kann auch eine Minorante  $\delta_k(x)$  hergeleitet werden.

In genau gleicher Weise folgt für den Fehler im Beispiel von Abschnitt 3 das Gleichungssystem

$$\delta'''' = 3\delta' + 2\delta - 2K + K', \quad \delta(0,2) = \delta'(0,2) = 0, \quad \delta''(0,2) = K(0,2) \quad (72).$$

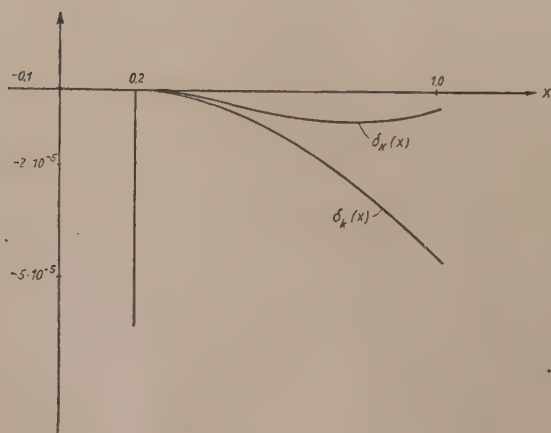


Bild 3

Ersetzt man hier gemäß Bild 1 die Funktion  $-2K + K'$  durch die Majorante  $0,8 \cdot 10^{-3} e^{-x}$  bzw. durch die Minorante  $0,5 \cdot 10^{-3} e^{-x}$  und  $K(0,2)$  durch die Werte  $-0,15 \cdot 10^{-3}$  bzw.  $-0,2 \cdot 10^{-3}$ , so ergeben sich als Lösungen der entstehenden Gleichungssysteme die in Bild 3 dargestellten Funktionen  $\delta_K(x)$  und  $\delta_k(x)$ , welche leicht approximativ (und im obigen Fall auch leicht exakt) bestimmt werden können. Auf Grund von diesen ergibt sich also die Abschätzung

$$\delta_K(x) \leq \delta(x) \leq \delta_k(x) \quad \dots \dots (73).$$

In ähnlicher Weise kann man auch in anderen Fällen vorgehen. Die weitläufige Frage, ob es stets möglich ist, für einen Fehler nach der obigen Methode eine Gleichung mit den fraglichen Vorzeichenbedingungen abzuleiten,

soll hier nicht berührt werden. Ein Nachteil dieser Methode besteht natürlich darin, daß die Ordnung der zu lösenden Gleichung erhöht wird.

d) Die letzte und wichtigste Methode beruht schließlich darauf, daß die Integration der Fehlergleichung bei Ersetzung von  $q(x)$  durch eine geeignete Mittelfunktion auch im jetzigen Fall weitgehend eine Näherung für den Verlauf des Fehlers liefert, welche überdies in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle bereits zur Fehlerabschätzung brauchbar ist. Es erscheint daher naheliegend, die Fehlergleichung auch jetzt direkt zu integrieren und dabei solche Korrekturen anzubringen, die der Unsicherheit des jetzigen Falles Rechnung tragen. Am besten geht man dabei folgendermaßen vor, wobei wir uns wieder auf Gleichungen zweiter Ordnung beschränken:

Zunächst sei nochmals daran erinnert, daß wir im Falle  $p(x) \geq 0$  auf Grund des am Schluß von Abschnitt 2 ausgesprochenen Satzes zum Ziel kommen konnten unter Verwendung der auf S. 29/30 eingeführten Funktionen  $\bar{q}_M(x)$ ,  $\bar{q}_m(x)$ ,  $\bar{\delta}_M(x)$  und  $\bar{\delta}_m(x)$ . Im jetzigen Falle ist die Bedingung  $p(x) \geq 0$  jedoch gerade nicht erfüllt. Um hier weiter zu kommen, teilen wir das Integrationsintervall in einige Teilintervalle der gleichen Länge  $l$ , deren Mittelpunkte mit  $m_1, m_2, \dots, m_n$  bezeichnet seien. Ferner bezeichne  $s_i$  bei positivem  $q(m_i)$  den Wert  $\bar{q}_M(m_i)$ , bei negativem dagegen den Wert  $\bar{q}_m(m_i)$ . Integriert man dann die zu (5) bzw. zu (26) gehörende homogene Gleichung

$$\bar{\delta}_s'' = r\bar{\delta}_s' + p\bar{\delta}_s \dots \dots \dots (74)$$

unter den  $n$  verschiedenen Anfangsbedingungen

$$\bar{\delta}_s(m_i) = 0, \quad \bar{\delta}_s'(m_i) = l s_i; \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \dots \dots \dots (75),$$

so ergeben sich  $n$  Lösungen  $\bar{\delta}_{s,i}(x)$ , die wir uns jeweils links von ihrem Anfangspunkt durch die identisch verschwindende Funktion ersetzt denken wollen. Die Summe

$$\sum_{i=1}^n \bar{\delta}_{s,i}(x) \dots \dots \dots (76)$$

der so definierten  $n$  Lösungen stellt dann eine gewisse Näherung für den Fehler  $\delta(x)$  dar, die jedoch in keiner Weise eine Majorante zu sein braucht.

Indessen erhält man sicher eine solche, wenn man diejenigen Teile der Lösungen  $\bar{\delta}_{s,i}(x)$ , die negativ sind, einfach wegläßt, die betreffende Lösung dort durch Null ersetzt und dann wieder die Summe der so abgeänderten Lösungen bildet, die jetzt mit  $\bar{A}_M(x)$  bezeichnet sei. Ebenso erhält man eine Minorante  $\bar{A}_m(x)$ , wenn man die positiven Teile wegläßt und die Lösungen dort durch Null ersetzt. Es läuft dies darauf hinaus, daß man  $q(x)$  in jedem Intervall entweder durch eine Majorante oder eine Minorante ersetzt (wobei eine von ihnen stets identisch verschwindet), und zwar so, wie es für jeden Wert von  $x$  am ungünstigsten ist. Daß ein solches Vorgehen zu einer Majorante bzw. zu einer Minorante für den Fehler führen muß, ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung (24). Die Überlegungen sind um so strenger, je größer die Anzahl  $n$  der Intervalle gewählt wurde. Damit hat man dann also eine Abschätzung in der Form

$$\bar{A}_m(x) \leq \delta(x) \leq \bar{A}_M(x) \dots \dots \dots (77).$$

Dieses zunächst umständlich erscheinende Verfahren ist in der Praxis sehr einfach durchzuführen. Es genügen dabei natürlich wieder sehr rohe Integrationsmethoden. Ferner braucht man durchaus nicht alle Lösungen  $\bar{\delta}_{s,i}(x)$  zu berechnen. Vielmehr genügt die Berechnung einiger weniger von ihnen, aus welchen dann die übrigen durch Interpolation approximativ festgestellt werden können. Schließlich kann man auch die sämtlichen Lösungen  $\bar{\delta}_{s,i}(x)$  auf Grund von (75) linear kombinieren aus zwei Grundlösungen  $\delta_1(x)$  und  $\delta_2(x)$  der zu (5) und (26) gehörenden homogenen Gleichung. Besonders einfach ist dieses Verfahren auch bei maschineller Integration durchzuführen.

Als Beispiel soll wieder die Aufgabe von Abschnitt 3 durchgerechnet werden. Wir teilen dazu das Intervall  $0,2 \leq x \leq 1,0$  in vier gleiche Teile der Länge  $l=0,2$ . Es bestehen dann die Beziehungen

$$\left. \begin{array}{ll} m_1 = 0,3, & m_2 = 0,5, \\ m_3 = 0,7, & m_4 = 0,9 \end{array} \right\} \dots (78).$$

Ferner können auf Grund von Bild 1 die Werte

$$\left. \begin{array}{ll} k_1 = -0,24 \cdot 10^{-3}, & k_2 = -0,19 \cdot 10^{-3}, \\ k_3 = -0,16 \cdot 10^{-3}, & k_4 = -0,13 \cdot 10^{-3} \end{array} \right\} (79)$$

angenommen werden. Weiterhin nimmt die Gleichung (74) gemäß (36) die Gestalt an

$$\bar{\delta}_s'' = -2\bar{\delta}_s' + \bar{\delta}_s \dots \dots \dots (80).$$

Es handelt sich nun darum, (80) unter den vier Anfangsbedingungen (75) zu integrieren, wenn in (75) die Werte (78) und (79) eingesetzt werden. Das Resultat ist in Bild 4 dargestellt. Von diesen vier Kurven wurden  $\bar{\delta}_{s,1}(x)$  und  $\bar{\delta}_{s,3}(x)$  direkt durch approximative Lösung der obigen Gleichungen berechnet, während  $\bar{\delta}_{s,2}(x)$  und  $\bar{\delta}_{s,4}(x)$  nach Augenmaß durch Inter- bzw. Extrapolation

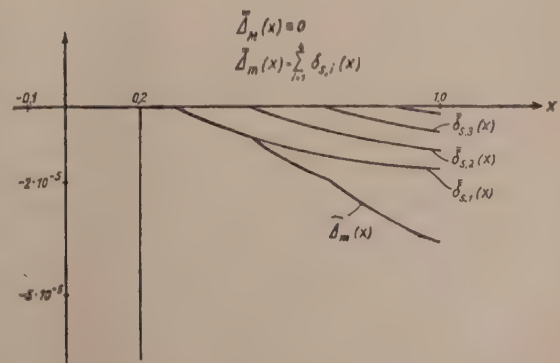


Bild 4



bestimmt wurden. Da hier die Lösungen  $\bar{\delta}_{s,i}(x)$  überall negativ sind, müssen sie zur Bildung von  $\bar{\Delta}_M(x)$  alle durch die identisch verschwindende Funktion ersetzt werden. Es ist also  $\bar{\Delta}_M(x) \equiv 0$ , während sich andererseits  $\bar{\Delta}_m(x)$  direkt als Summe der vier Lösungen darstellt.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man in absolut analoger Weise auch bei Gleichungen höherer Ordnungen vorgehen kann, wie das hier jedoch nicht im einzelnen durchgeführt werden soll.

## 7. Schlußbemerkungen und Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die in I für Gleichungen erster Ordnung entwickelte Methode der Fehlerabschätzung auf Gleichungen höherer Ordnung ausgedehnt. Als Hauptunterschied ergibt sich dabei, daß auch die Fehlergleichung eine höhere Ordnung annimmt. Für die Fehlerabschätzung werden dann die fünf Funktionen  $\bar{\delta}_M(x)$ ,  $\bar{\delta}_m(x)$ ,  $\bar{\Delta}_M(x)$ ,  $\bar{\Delta}_m(x)$  und  $\bar{\delta}(x)$  eingeführt, die in manchen Fällen übereinstimmen, und von denen sich die beiden ersten gemäß (26) als Lösungen der Fehlergleichung ergeben, wenn man in dieser  $q(x)$  durch  $\bar{q}_M(x)$  bzw. durch  $\bar{q}_m(x)$  ersetzt. Die Bildung von  $\bar{\Delta}_M(x)$  und  $\bar{\Delta}_m(x)$  ist weiterhin auf S. 39 beschrieben, während diejenige von  $\bar{\delta}(x)$  gemäß (25) erfolgt.

Für die Fehlerabschätzung wichtig sind in erster Linie die vier ersten der genannten Funktionen. Sie können stets in ganz elementarer Weise bestimmt werden. Dabei sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Wenn erstens gewisse Vorzeichenbedingungen erfüllt sind (bei Gleichungen zweiter Ordnung muß z.B.  $p(x) \geq 0$  sein), können die Funktionen  $\bar{\delta}_M(x)$  und  $\bar{\delta}_m(x)$  direkt gemäß (29) zur Fehlerabschätzung verwendet werden, wobei meist die Kenntnis einer von ihnen genügt. Die Bestimmung kann dabei entweder nach der ersten der beiden genannten Methoden gemäß (27) (bzw. einer entsprechenden Formel bei Gleichungen höherer Ordnung) erfolgen oder dann nach der S. 30—31 und S. 36—38 beschriebenen zweiten Methode durch direkte, im allgemeinen approximative Integration der Fehlergleichung. Den ersten Weg wird man vor allem dann einschlagen, wenn die zur Fehlergleichung gehörende homogene Gleichung in geschlossener Form oder sonst einfach integrierbar ist. Ebenso ist diese Methode z.B. bequem in dem häufig vorkommenden Fall, daß die zu lösende Differentialgleichung linear und homogen ist. Denn in diesem Fall stimmt die zur Fehlergleichung gehörende homogene Gleichung mit der ursprünglich gegebenen Gleichung überein. Die nach Adams gefundene Lösung dieser letzteren ist dann also gleichzeitig auch eine Lösung der zur Fehlergleichung gehörenden homogenen Gleichung.

Wenn dagegen die genannten Vorzeichenbedingungen nicht erfüllt sind, kann man zunächst versuchen, dies durch Umformung der Fehlergleichung zu erreichen, wozu vor allem die in Abschnitt 6 unter a) und c) genannten Methoden zur Verfügung stehen. Andernfalls liefert das unter d) beschriebene Verfahren stets die Funktionen  $\bar{\Delta}_M(x)$  und  $\bar{\Delta}_m(x)$ , aus welchen sich gemäß (77) eine Abschätzung ergibt. Auch hier braucht man meistens nur eine der beiden Funktionen zu berechnen.

Schließlich kann oft, und zwar wieder vor allem dann, wenn die homogene Gleichung in geschlossener Form lösbar ist, auch die Verwendung der Majorante  $\bar{\delta}(x)$  für den Fehlerbetrag von Nutzen sein, welche übrigens in sehr vielen Fällen dem Betrag nach mit  $\bar{\delta}_M(x)$  oder mit  $\bar{\delta}_m(x)$  übereinstimmt. Man vergleiche dazu die in den Abschnitten 3 und 4 durchgerechneten Beispiele. Diese Majorante ist außerdem von prinzipiellem Wert; vor allem hat sie den Vorteil, daß sie ohne Einschränkung in allen Fällen gültig ist. Eine weitere Möglichkeit der Fehlerabschätzung, die mit  $\bar{\delta}(x)$  in engem Zusammenhang steht und die unter Umständen praktisch sehr wertvoll sein kann, ist auf S. 38 und 39 ausgeführt.

Die Majorante  $\bar{\delta}(x)$  ist weiterhin die direkte Verallgemeinerung der in I gleich bezeichneten Majorante. Jedoch liegen die Verhältnisse bei Gleichungen erster Ordnung insofern wesentlich einfacher, als  $D(x, \xi)$  dort automatisch stets das gleiche Vorzeichen hat, so daß es am einfachsten ist, mit  $\bar{\delta}(x)$  zu operieren. Ergänzend sei jedoch an dieser Stelle noch zu I hinzugefügt, daß es selbstverständlich auch bei Gleichungen erster Ordnung möglich ist, die Funktionen  $\bar{\delta}_M(x)$  und  $\bar{\delta}_m(x)$  einzuführen. Gemäß (I,22) nimmt z.B.  $\bar{\delta}_M(x)$  die Gestalt an

$$\bar{\delta}_M(x) = e^{-\int_{x_0}^x p \, dx} \int_{x_0}^x \bar{q}_M(x) e^{\int_{x_0}^x p \, dx} dx \dots \dots \dots (81):$$

Die Verwendung von  $\bar{\delta}_M(x)$  und  $\bar{\delta}_m(x)$  ist sogar bei Gleichungen erster Ordnung besonders sinn- gemäß, weil die bei Gleichungen höherer Ordnung so beträchtliche Schwierigkeiten bereitenden

Vorzeichenbedingungen dort automatisch erfüllt sind, so daß (29) immer gilt. Im übrigen ist der Unterschied zwischen der Verwendung von  $\bar{\delta}(x)$  einerseits und  $\bar{\delta}_M(x)$  und  $\bar{\delta}_m(x)$  andererseits bei Gleichungen erster Ordnung völlig unwesentlich. Die Verwendung der letzten Funktionen ist vor allem dann gegeben, wenn  $q(x)$  das Vorzeichen öfters wechselt.

Bei all den angegebenen Fehlerabschätzungsmethoden ist schließlich noch im Auge zu behalten, daß es sich in erster Linie um prinzipielle Möglichkeiten handelt, nach denen eine Abschätzung vorgenommen werden kann. Die angegebenen Wege können, je nach der gestellten Aufgabe, noch auf die verschiedenartigste Weise modifiziert, verbessert und vereinfacht werden. Ähnlich wie beim Verfahren von Adams selbst ist es ein besonderer Vorteil dieser Methoden, daß sie sich zwanglos allen speziellen Forderungen anpassen lassen. Ferner kann man auch versuchen, bereits die gegebene Gleichung auf eine zur numerischen Integration und zur Fehlerabschätzung günstige Gestalt umzuformen. Beispielsweise wird es in dem häufig vorkommenden Fall einer linearen homogenen Gleichung zweiter Ordnung in der Regel vorteilhaft sein, diese in eine Riccatische Gleichung erster Ordnung überzuführen.

Eingegangen am 20. Dezember 1951.

## Taylor-Entwicklungen und finite Ausdrücke für $\Delta u$ und $\Delta\Delta u$

Von J. Albrecht in Haste bei Hannover

*Die zur Herleitung finiter Ausdrücke für  $\Delta u$  und  $\Delta\Delta u$  erforderliche Taylor-Entwicklung eines allgemeinen Ansatzes wird durch geeignete Zusammenfassung partieller Ableitungen in eine übersichtliche Form gebracht, aus der leicht zu ersehen ist, welche Möglichkeiten hinsichtlich des Taylor-Abgleiches bestehen. Es werden regelmäßige Gitter aus Quadraten, Dreiecken, Sechsecken und Würfeln zugrunde gelegt.*

*The Taylor series expansion of a general statement that leads to finite-difference approximations of  $\Delta u$  and  $\Delta\Delta u$  is brought, by a suitable composition of the partial derivatives, into a clear form. Thus it is easy to survey the possibilities of the procedure. The author discusses regular grids of squares, triangles, hexagons, and cubes.*

*Le développement de Taylor d'un arrangement général, lequel est nécessaire pour la dérivation d'expressions finies pour  $\Delta u$  et  $\Delta\Delta u$ , est réduit par une composition convenable de dérivations partielles à une forme claire, d'où il est facile de voir, quelles possibilités existent à l'égard de l'ajustement de Taylor. Des grilles régulières de carrés, triangles, hexagones et cubes sont supposées.*

Тейлорово разложение некоторого выражения в общем виде, требуемое для вывода конечных выражений для  $\Delta u$  и  $\Delta\Delta u$ , приводится, путем надлежащего сочетания частных производных, к наглядному виду, из которого легко усматриваются возможности тейлорова согласования. В основу положены регулярные решетки из квадратов, треугольников, шестиугольников и кубов.

Unter Verwendung regelmäßiger Netze aus Quadraten, Dreiecken und Sechsecken bzw. aus Würfeln werden im folgenden für Funktionen  $u(x, y)$  bzw.  $u(x, y, z)$  Taylor-Entwicklungen von  $\Delta^n u$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\Delta = \text{Laplace'scher Operator}$ ) aufgestellt und einfache finite Ausdrücke für  $\Delta u$  und  $\Delta\Delta u$  angegeben<sup>1)</sup>. Dabei soll vor allem gezeigt werden, wie sich durch Zusammenfassung partieller Ableitungen zu geeigneten Operatoren eine übersichtliche Darstellung der Taylor-Entwicklung erzielen läßt, die zwei Vorteile bietet:

1. die Zahl der beim Taylor-Abgleich zu lösenden Gleichungen wird verringert.
2. Es ist leicht feststellbar,
  - a) von welcher Ordnung das Restglied eines finiten Ausdruckes bei gegebenen Gitterpunkten höchstens werden kann, und
  - b) wieviele Punkte zur Aufstellung eines finiten Ausdruckes mit einem Restglied von gewünschter Ordnung mindestens erforderlich sind.

Besonders günstig sind finite Ausdrücke für  $\Delta u$ , die nur die Entwicklungsstelle und die Punkte des ersten umliegenden Ringes verwenden. Dann läßt sich gewöhnlich vermeiden, daß beim Aufschreiben finiter Gleichungen in randnahen Gitterpunkten auch Werte an Stellen auftreten, die außerhalb des gegebenen Grundgebietes liegen.

### A. Quadratische Netze

$u_a$  bezeichne den Funktionswert an der Stelle des Netzes, an der ein finiter Ausdruck aufgestellt werden soll;  $\sum u_b$  sei die Summe der Funktionswerte in den unmittelbar benachbarten

<sup>1)</sup> Eine allgemeine und ausführliche Darstellung des Differenzenverfahrens findet man in: L. Collatz: 1. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin 1951; 2. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949. 3. Einige neuere Forschungen über numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Abschn. I d. Z. angew. Math. Mech. Bd. 31 (1951), S. 230—236; 4. Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben, Z. angew. Math. Mech. Bd. 30 (1950), S. 385—388. [Im Text und in den Tabellen eingefügte Hinweisziffern beziehen sich auf diese Literaturangaben.]





Gitterpunkten,  $\sum u_c, \sum u_d, \dots$  die Summe der Werte in weiteren, jeweils im gleichen Abstände von der Entwicklungsstelle gelegenen Punkten (s. Bild A). Entsprechendes gelte für die Differentialausdrücke  $\Delta u_a, \sum \Delta u_b, \sum \Delta u_c, \dots; \Delta \Delta u_a, \sum \Delta \Delta u_b, \sum \Delta \Delta u_c, \dots$  usw.  $h$  ist die Seitenlänge der Maschen des Netzes.

Nun wird (mit  $a, b, c, \dots; A, B, C, \dots$  als noch zu bestimmenden Koeffizienten<sup>2)</sup>) der Ausdruck

$$\begin{aligned} & \{a \cdot u_a + b \sum u_b + c \sum u_c + d \sum u_d + \dots\} \\ & + \frac{h^2}{2!} \{A \Delta u_a + B \sum \Delta u_b + C \sum \Delta u_c + D \sum \Delta u_d \dots\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

gebildet und an der erwähnten Stelle nach dem Taylor'schen Satz entwickelt (s. Schema A), wobei durch Zusammenfassung partieller Ableitungen Operatoren  $\Delta^p D^q$  ( $p, q = 0, 1, 2, \dots$ ) eingeführt werden mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad D = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Zur näheren Erläuterung des unter 2 a und 2 b Gesagten stellen wir uns die Aufgabe, für die Differentialgleichung  $\Delta u = r(x, y)$  finite Gleichungen zu ermitteln, wollen dazu aber Funktionswerte  $u$  sowie Ausdrücke  $\Delta u \{= r(x, y)\}, \Delta \Delta u \{= \Delta r(x, y)\}, \dots$  nur in den Punkten heranziehen, die in Bild A 1 angegeben sind. — Bei der Durchführung des Taylor-Abgleiches (d. h. Nullsetzen der Faktoren der in der Taylor-Entwicklung auftretenden Operatoren bis zu Gliedern möglichst hoher Ordnung hin) sind dann u. a. folgende Gleichungen zu lösen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Faktor von } \frac{h^0}{0!} \cdot u_a &: a + 4(b + c + e) = 0 \\ \text{Faktor von } \frac{h^4}{4!} D u_a &: 4(b + 16c - 4e) = 0 \\ \text{Faktor von } \frac{h^8}{8!} D^2 u_a &: 4(b + 256c + 16e) = 0 \\ \left[ \text{Faktor von } \frac{h^{12}}{12!} D^3 u_a &: 4(b + 4096c - 64e) = 0 \right] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Erfüllt für:} \\ &a = 300 \\ &b = -64 \\ &c = 1 \\ &e = -12 \end{aligned}$$

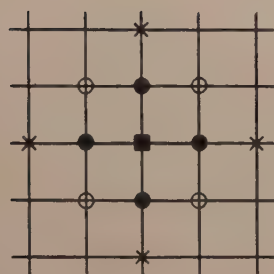


Bild A 1

Die eingeklammerte Gleichung wird von den Werten, die durch die ersten drei Gleichungen bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor eindeutig festgelegt sind, nicht mehr befriedigt, im günstigsten Falle kann also ein Restglied 12. Ordnung erreicht werden. (Die Koeffizienten der übrigen Glieder der Taylor-Entwicklung bis zur 8. oder 10. Ordnung einschließlich lassen sich durch geeignete Wahl der Größen  $A, B, C, E; \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon; \dots$  zum Verschwinden bringen.) — Ebenso zeigt man: Sollen nur die Entwicklungsstelle und die Punkte des um-



Bild A 2

liegenden Ringes herangezogen werden (Bild A2), so lassen sich für  $\Delta u = r(x, y)$  finite Ausdrücke mit einem Restglied höchstens 8. Ordnung bilden, und zwar wegen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Faktor von } \frac{h^0}{0!} u_a &: a + 4(b + e) = 0 \\ \text{Faktor von } \frac{h^4}{4!} D u_a &: 4(b - 4e) = 0 \\ \left[ \text{Faktor von } \frac{h^8}{8!} D^2 u_a &: 4(b + 16e) \right] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Erfüllt für:} \\ &a = 20 \\ &b = -4 \\ &e = -1 \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Verwechslungen mit  $a, b, c, \dots$  als Punktbezeichnungen sind wohl nicht zu befürchten.



Abschließend werden in Tabelle A einfache Formeln zusammengestellt, die man aus der obigen allgemeinen Taylor-Entwicklung herleiten kann. Formel (3) ersetzt die Differentialgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  durch finite Gleichungen der Form

$$\sum u_e + 4 \sum u_b = v \cdot u_a \quad \text{mit} \quad h^2 \lambda = 12 \frac{20 - v}{52 + v} \quad [2]$$

Tabelle A

Nr.	Formel	Restglied
1.	$\{\sum u_b - 4 u_a\} - h^2 \Delta u_a$	[1] 4. Ordnung
2.	$\{\sum u_e + 4 \sum u_b - 20 u_a\} - \frac{1}{2} h^2 \{\sum \Delta u_b + 8 \Delta u_a\}$	[1] 6. Ordnung
3.	$\{\sum u_e + 4 \sum u_b - 20 u_a\} - \frac{1}{12} h^2 \{\sum \Delta u_e + 4 \sum \Delta u_b + 52 \Delta u_a\}$	[2] 6. Ordnung
4.	$\{\sum u_e + 4 \sum u_b - 20 u_a\} - \frac{1}{15} h^2 \{\sum \Delta u_e + \sum \Delta u_b + 82 \Delta u_a\} - \frac{3}{10} h^4 \Delta \Delta u_a$	[3] 8. Ordnung
5.	$\{\sum u_e + 4 \sum u_b - 20 u_a\} + \frac{1}{5} h^2 \{\sum \Delta u_b - 34 \Delta u_a\} - \frac{1}{30} h^4 \{\sum \Delta \Delta u_b + 17 \Delta \Delta u_a\}$	[3] 8. Ordnung
6.	$\{\sum u_e - 12 \sum u_e - 64 \sum u_b + 300 u_a\} - \frac{1}{40} h^2 \{11 \sum \Delta u_e + 16 \sum \Delta u_b - 3468 \Delta u_a\} + \frac{1}{360} h^4 \{\sum \Delta \Delta u_e + 164 \sum \Delta \Delta u_b + 2040 \Delta \Delta u_a\}$	10. Ordnung
7.	$\{\sum u_e + 2 \sum u_e - 8 \sum u_b + 20 u_a\} - h^4 \Delta \Delta u_a$	[4] 6. Ordnung
8.	$\{\sum u_f + \sum u_e - 2 \sum u_e - 10 \sum u_b + 36 u_a\} - \frac{1}{2} h^4 \{\sum \Delta \Delta u_b + 2 \Delta \Delta u_a\}$	[4] 8. Ordnung
9.	$\{\sum u_f + 8 \sum u_f + 18 \sum u_e - 8 \sum u_e - 144 \sum u_b + 468 u_a\} + \frac{1}{20} h^4 \{\sum \Delta \Delta u_e - 26 \sum \Delta \Delta u_e - 72 \sum \Delta \Delta u_b - 332 \Delta \Delta u_a\}$	[4] 10. Ordnung
10.	$\{-\sum u_a - 3 \sum u_f + 12 \sum u_e + 24 \sum u_e - 57 \sum u_b + 112 u_a\} + \frac{1}{6} h^4 \{\sum \Delta \Delta u_e + 2 \sum \Delta \Delta u_b - 12 \Delta \Delta u_a\}$	10. Ordnung

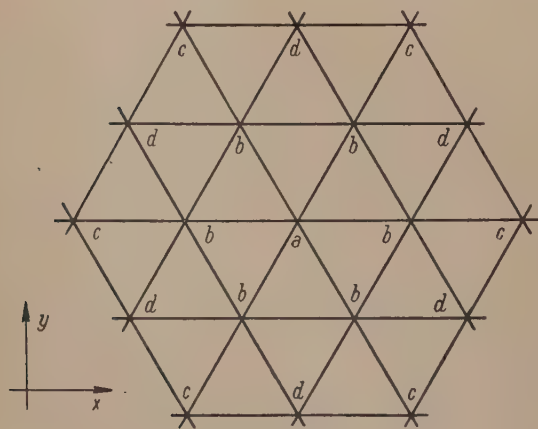


Bild B

## B. Dreiecksnetze

Die zu Anfang des Abschnitts A gegebenen Erklärungen für die Bezeichnungen  $u_a, \sum u_b, \dots$  usw. gelten sinngemäß auch für Dreiecksnetze, wobei jedoch die Lage der verwendeten Punkte jetzt aus Bild B hervorgeht. Schema B enthält die allgemeine Taylor-Entwicklung; die darin auftretenden Ausdrücke  $\Delta_6^n u$  und  $\Delta_{12}^n u$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) sind wie folgt erklärt

$$(u_{jk} \text{ bedeutet } \frac{\partial u^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}):$$

$$\begin{aligned} \Delta_6^0 u &= u_{60} - 15 u_{42} + 15 u_{24} - u_{06} \\ \Delta_6^1 u &= u_{60} - 14 u_{62} + 14 u_{26} - u_{08} \\ \Delta_6^2 u &= u_{100} - 13 u_{82} - 14 u_{64} + 14 u_{46} + 13 u_{28} - u_{010} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

bzw.

$$\Delta_{12}^0 u = u_{120} - 66 u_{102} + 495 u_{84} - 924 u_{66} + 495 u_{48} - 66 u_{210} + u_{012}.$$

Schema B

$$\begin{aligned}
 & a u_a + b \Sigma u_b + c \Sigma u_c + d \Sigma u_d \\
 & + \frac{h^2}{2!} \{A \Delta u_a + B \Sigma \Delta u_b + C \Sigma \Delta u_c + D \Sigma \Delta u_d\} \\
 & + \frac{h^4}{4!} \{\alpha \Delta \Delta u_a + \beta \Sigma \Delta \Delta u_b + \gamma \Sigma \Delta \Delta u_c + \delta \Sigma \Delta \Delta u_d\} \\
 & + \dots \\
 = & u_a \left[ 6 \{b + c + d\} + a \right] \\
 & + \frac{h^2}{2!} \Delta u_a \left[ 3 \{b + 4c + 3d\} + 6 \{B + C + D\} + A \right] \\
 & + \frac{h^4}{4!} \Delta^2 u_a \left[ \frac{9}{4} \{b + 16c + 9d\} + \left(\frac{4}{2}\right) 3 \{B + 4C + 3D\} + 6 \{\beta + \gamma + \delta\} + \alpha \right] \\
 & + \frac{h^6}{6!} \Delta^3 u_a \left[ \frac{15}{8} \{b + 64c + 27d\} + \left(\frac{6}{2}\right) \frac{9}{4} \{B + 16C + 9D\} + \left(\frac{6}{4}\right) 3 \{\beta + 4\gamma + 3\delta\} + \dots \right] \\
 & + \frac{h^8}{8!} \Delta^4 u_a \left[ \frac{105}{64} \{b + 256c + 81d\} + \left(\frac{8}{2}\right) \frac{15}{8} \{B + 64C + 27D\} + \left(\frac{8}{4}\right) \frac{9}{4} \{\beta + 16\gamma + 9\delta\} + \dots \right] \\
 & + \frac{h^{10}}{10!} \Delta^5 u_a \left[ \frac{189}{128} \{b + 1024c + 243d\} + \left(\frac{10}{2}\right) \frac{105}{64} \{B + 256C + 81D\} + \left(\frac{10}{4}\right) \frac{15}{8} \{\beta + 64\gamma + 27\delta\} + \dots \right] \\
 & + \frac{h^{12}}{12!} \Delta^6 u_a \left[ \frac{693}{512} \{b + 4096c + 729d\} + \left(\frac{12}{2}\right) \frac{189}{128} \{B + 1024C + 243D\} + \left(\frac{12}{4}\right) \frac{105}{64} \{\beta + 256\gamma + 81\delta\} + \dots \right] \\
 & + \frac{h^6}{6!} \Delta_6^0 u_a \left[ \frac{3}{16} \{b + 64c - 27d\} \right] \\
 & + \frac{h^8}{8!} \Delta_6^1 u_a \left[ \frac{3}{8} \{b + 256c - 81d\} + \left(\frac{8}{2}\right) \frac{3}{16} \{B + 64C - 27D\} \right] \\
 & + \frac{h^{10}}{10!} \Delta_6^2 u_a \left[ \frac{135}{256} \{b + 1024c - 243d\} + \left(\frac{10}{2}\right) \frac{3}{8} \{B + 256C - 81D\} + \left(\frac{10}{4}\right) \frac{3}{16} \{\beta + 64\gamma - 27\delta\} \right] \\
 & + \frac{h^{12}}{12!} \Delta_6^3 u_a \left[ \frac{165}{256} \{b + 4096c - 729d\} + \left(\frac{12}{2}\right) \frac{135}{256} \{B + 1024C - 243D\} + \left(\frac{12}{4}\right) \frac{3}{8} \{\beta + 256\gamma - 81\delta\} + \dots \right] \\
 & + \frac{h^{12}}{12!} \Delta_{12}^0 u_a \left[ \frac{3}{1024} \{b + 4096c + 729d\} \right] \\
 & + \dots \text{ Glieder 14. und höherer Ordnung.}
 \end{aligned}$$

Zur Aufstellung finiter Ausdrücke für  $\Delta u = r(x, y)$  bestehen folgende Möglichkeiten (siehe in der Taylor-Entwicklung die Koeffizienten von  $\frac{h^0}{0!} \Delta^0 u_a, \frac{h^6}{6!} \Delta_6^0 u_a, \frac{h^{12}}{12!} \Delta_{12}^0 u_a$ ):

$a = 6$	$b = -1$			Restglied 6. Ordnung erreichbar
$a = 168$	$b = -27$	$d = -1$		„ 12. „ „
$a = 3844$	$b = -624$	$d = -16$	$c = 3$	„ 18. „ „

Von den in Tabelle B aufgeführten finiten Ausdrücken ersetzen die unter Nr. 1—4 genannten die Differentialgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  durch Gleichungen der Form  $\Sigma u_b = \nu u_a$  [2] „Spezielles Matrizenwertproblem“ [2]}; dabei wird:

Formel Nr.	1	2	3	4
$\frac{h^2 \lambda}{8} =$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \nu$	$2 \frac{6 - \nu}{18 + \nu}$	$1 - \sqrt{\frac{1}{6} \nu}$	$\frac{48 + \nu - \sqrt{684 + 366 \nu + \nu^2}}{30}$



Tabelle B

Nr.	Formel	Restglied
1.	$\{\Sigma u_b - 6u_a\} - \frac{3}{2} h^2 \Delta u_a$ [1]	$= \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{9}{4} \Delta^2 u_a + \dots$
2.	$\{\Sigma u_b - 6u_a\} - \frac{1}{16} h^2 \{\Sigma \Delta u_b + 18 \Delta u_a\}$ [1]	$= \frac{h^6}{6!} \left\{ -\frac{75}{32} \Delta^3 u_a + \frac{3}{16} \Delta_6^0 u_a \right\} + \dots$
3.	$\{\Sigma u_b - 6u_a\} - \frac{3}{2} h^2 \Delta u_a - \frac{3}{32} h^4 \Delta \Delta u_a$ [1]	$= \frac{h^6}{6!} \left\{ \frac{15}{8} \Delta^3 u_a + \frac{3}{16} \Delta_6^0 u_a \right\} + \dots$
4.	$\{\Sigma u_b - 6u_a\} - \frac{1}{36} h^2 \{\Sigma \Delta u_b + 48 \Delta u_a\} - \frac{5}{96} h^4 \Delta \Delta u_a$	$= \frac{h^6}{6!} \cdot \frac{3}{16} \Delta_6^0 u_a + \dots$
5.	$\{\Sigma u_d + 27 \Sigma u_b - 168 u_a\} + \frac{1}{8} h^2 \{\Sigma \Delta u_d - 21 \Sigma \Delta u_b - 240 \Delta u_a\}$	8. Ordnung
6.	$\{\Sigma u_d - 3 \Sigma u_b + 12 u_a\} - \frac{9}{16} h^4 \Delta \Delta u_a$ [1]	$= \frac{h^6}{6!} \left\{ 45 \Delta^3 u_a - \frac{45}{8} \Delta_6^0 u_a \right\} + \dots$
7.	$\{\Sigma u_d - 3 \Sigma u_b + 12 u_a\} - \frac{1}{48} h^4 \{2 \Sigma \Delta \Delta u_b + 15 \Delta \Delta u_a\}$	$= -\frac{h^6}{6!} \frac{45}{8} \Delta_6^0 u_a + \dots$
8.	$\{\Sigma u_c + 2 \Sigma u_d - 10 \Sigma u_b + 42 u_a\} - \frac{3}{16} h^4 \{\Sigma \Delta \Delta u_b + 6 \Delta \Delta u_a\}$ [1]	8. Ordnung

## C. Sechsecksnetze

Wegen der Bezeichnungen verweisen wir wieder auf die Erläuterungen zu Anfang von Abschnitt A, wobei jetzt Bild C zugrunde zu legen ist. Der in der Taylor-Entwicklung (Schema C) auftretende Operator  $\Delta_6^0$  wurde bereits in Abschnitt B erklärt; wir führen noch ein:

$$\Delta_3^0 u = u_{30} - 3u_{12},$$

$$\Delta_3^1 u = u_{50} - 2u_{32} - 3u_{14}.$$

## Schema C

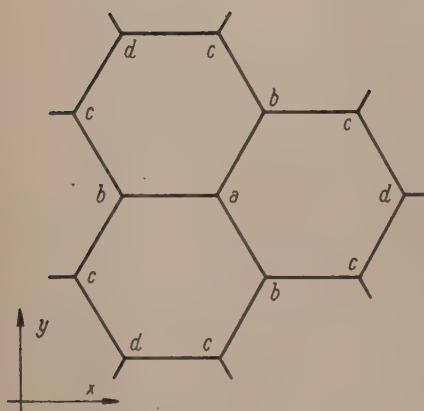


Bild C

$$\begin{aligned}
 & \{a \cdot u_a + b \Sigma u_b + c \Sigma u_c + d \Sigma u_d\} \\
 & + \frac{h^2}{2!} \{A \Delta u_a + B \Sigma \Delta u_b + C \Sigma \Delta u_c + D \Sigma \Delta u_d\} \\
 & = \frac{h^0}{0!} u_a \left[ 3 \{b + 2c + d\} + a \right] \\
 & + \frac{h^2}{2!} \Delta u_a \left[ \frac{3}{2} \{b + 6c + 4d\} + 3 \{B + 2C + D\} + A \right] \\
 & + \frac{h^4}{4!} \Delta^2 u_a \left[ \frac{9}{8} \{b + 18c + 16d\} + \left(\frac{4}{2}\right) \frac{3}{2} \{B + 6C + 4D\} \right] \\
 & + \frac{h^6}{6!} \Delta^3 u_a \left[ \frac{15}{16} \{b + 54c + 64d\} + \left(\frac{6}{2}\right) \frac{9}{8} \{B + 18C + 16D\} \right] \\
 & - \frac{h^3}{3!} \Delta_3^0 u_a \left[ \frac{3}{4} \{b - 8d\} \right] \\
 & - \frac{h^5}{5!} \Delta_3^1 u_a \left[ \frac{15}{16} \{b - 32d\} + \left(\frac{5}{2}\right) \frac{3}{4} \{B - 8D\} \right] \\
 & + \frac{h^6}{6!} \Delta_6^0 u_a \left[ \frac{3}{32} \{b - 54c + 64d\} \right] \\
 & + \dots \text{Glieder 7 und höherer Ordnung}
 \end{aligned}$$

Einige einfache finite Ausdrücke sind in Tabelle C zusammengefaßt. — Die Sechsecksnetze besitzen gegenüber den Dreiecksnetzen den Vorteil, bei gleichem Grundbereich und gleicher Maschenweite  $h$  weniger Punkte aufzuweisen, so daß zur Lösung eines Problems auch weniger Unbekannte einzuführen sind; beim Aufschreiben von finiten Gleichungen derselben Ordnung in randnahen Stellen hingegen erweisen sich die Sechsecksnetze als ungünstiger, weil die herangezogenen Gitterpunkte weiter von der Entwicklungsstelle entfernt sind als in Dreiecksnetzen (vgl. z. B. die Formeln 6. Ordnung).

Tabelle C

Nr.	Formel	Restglied
1.	$\{\Sigma u_b - 3u_a\} - \frac{3}{4} h^2 \Delta u_a$ [1]	3. Ordnung
2.	$\{\Sigma u_d + 8 \Sigma u_b - 27 u_a\} - 9 h^2 \Delta u_a$	4. Ordnung
3.	$\{\Sigma u_d + 8 \Sigma u_b - 27 u_a\} - \frac{1}{4} h^2 \{\Sigma \Delta u_d + 2 \Sigma \Delta u_b + 27 \Delta u_a\}$	6. Ordnung
4.	$\{\Sigma u_d - 2 \Sigma u_c + 8 \Sigma u_b - 15 u_a\} + \frac{9}{16} h^4 \Delta \Delta u_a$	5. Ordnung

### D. Würfelnetze

Bezeichnungen:  $u_m$  sei der Funktionswert in der Mitte eines Würfels von der Kantenlänge  $2h$ ;  $\Sigma u_s$ ,  $\Sigma u_k$  und  $\Sigma u_e$  jeweils die Summe der Werte in der Mitte der Seiten, in der Mitte der Kanten und in den Ecken des Würfels. Entsprechendes gelte für  $\Delta u_m$ ,  $\Sigma \Delta u_s$ , ... usw.

Abkürzungen:

$$\Delta^n = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad u_{jkl} = \frac{\partial u^{j+k+l}}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l};$$

$$u_{2,2,0} = u_{220} + u_{202} + u_{022}; \quad u_{4,4,0} = u_{440} + u_{404} + u_{044}.$$

Schema D

$$\begin{aligned} & m \cdot u_m + s \Sigma u_s + k \Sigma u_k + e \Sigma u_e \\ & + \frac{h^2}{2!} \{M \cdot \Delta u_m + S \Sigma \Delta u_s + K \Sigma \Delta u_k + E \Sigma \Delta u_e\} \\ & + \frac{h^4}{4!} \{\mu \cdot \Delta \Delta u_m + \sigma \Sigma \Delta \Delta u_s + \kappa \Sigma \Delta \Delta u_k + \varepsilon \Sigma \Delta \Delta u_e\} \\ & + \dots \\ & = u_m \left[ \{ 6s + 12k + 8e + m \} \right] \\ & + \frac{h^2}{2!} \Delta u_m \left[ \{ 2s + 8k + 8e \} + \{ 6S + 12K + 8E + M \} \right] \\ & + \frac{h^4}{4!} \Delta^2 u_m \left[ \{ 2s + 8k + 8e \} + \left( \frac{4}{2} \right) \{ 2S + 8K + 8E \} + \{ 6\sigma + 12\kappa + 8\varepsilon + \mu \} \right] \\ & + \frac{h^6}{6!} \Delta^3 u_m \left[ \{ 2s + 8k + 8e \} + \left( \frac{6}{2} \right) \{ 2S + 8K + 8E \} + \left( \frac{6}{4} \right) \{ 2\sigma + 8\kappa + 8\varepsilon + \dots \} \right] \\ & + \frac{h^8}{8!} \Delta^4 u_m \left[ \{ 2s + 8k + 8e \} + \left( \frac{8}{2} \right) \{ 2S + 8K + 8E \} + \left( \frac{8}{4} \right) \{ 2\sigma + 8\kappa + 8\varepsilon + \dots \} \right] \\ & + \frac{h^4}{4!} u_{2,2,0} \left[ \{ -4s + 8k + 32e \} \right] \\ & + \frac{h^6}{6!} \Delta u_{2,2,0} \left[ \{ -6s + 36k + 96e \} + \left( \frac{6}{2} \right) \{ -4S + 8K + 32E \} \right] \\ & + \frac{h^8}{8!} \Delta^2 u_{2,2,0} \left[ \{ -8s + 80k + 192e \} + \left( \frac{8}{2} \right) \{ -6S + 36K + 96E \} + \left( \frac{8}{4} \right) \{ -4\sigma + 8\kappa + 32\varepsilon \} \right] \\ & + \frac{h^6}{6!} u_{222} \left[ \{ 6s - 156k + 384e \} \right] \\ & + \frac{h^8}{8!} \Delta u_{222} \left[ \{ 16s - 496k + 2304e \} + \left( \frac{8}{2} \right) \{ 6S - 156K + 384E \} \right] \\ & + \frac{h^8}{8!} u_{4,4,0} \left[ \{ 4s + 72k + 128e \} \right] \\ & + \dots \text{Glieder 10. und höherer Ordnung} \end{aligned}$$



Aus der in Schema D gegebenen allgemeinen Taylor-Entwicklung lassen sich die in Tabelle D genannten finiten Ausdrücke herleiten; wir erwähnen auch hier die zur bequemen Lösung von Eigenwertproblemen  $\Delta u + \lambda u = 0$  besonders geeigneten Formeln:

Formel Nr.	Finite Gleichung	$h^2 \lambda$
3	$\Sigma u_k + 2 \Sigma u_s = v \cdot u_m$	$12 \frac{24 - v}{48 + v}$
5	$\Sigma u_e + 8 \Sigma u_s = v \cdot u_m$	$12 \frac{56 - v}{88 + v}$

Tabelle D

Nr.	Formel	Restglied
1.	$\{\Sigma u_s - 6 u_m\} - h^2 \Delta u_m$ [1]	4. Ordnung
2.	$\{\Sigma u_k + 2 \Sigma u_s - 24 u_m\} - \frac{1}{2} h^2 \{\Sigma \Delta u_s + 6 \Delta u_m\}$ [1]	6. Ordnung
3.	$\{\Sigma u_k + 2 \Sigma u_s - 24 u_m\} - \frac{1}{12} h^2 \{\Sigma \Delta u_k + 2 \Sigma \Delta u_s + 48 \Delta u_m\}$	6. Ordnung
4.	$\{\Sigma u_e + 8 \Sigma u_s - 56 u_m\} - h^2 \{\Sigma \Delta u_s + 6 \Delta u_m\}$	6. Ordnung
5.	$\{\Sigma u_e + 8 \Sigma u_s - 56 u_m\} - \frac{1}{12} h^2 \{\Sigma \Delta u_e + 8 \Sigma \Delta u_s + 88 \Delta u_m\}$	6. Ordnung
6.	$\{\Sigma u_e + 3 \Sigma u_k + 14 \Sigma u_s - 128 u_m\} + h^2 \{\Sigma \Delta u_s - 36 \Delta u_m\} - \frac{1}{6} h^4 \{\Sigma \Delta \Delta u_s + 15 \Delta \Delta u_m\}$	8. Ordnung
7.	$\{\Sigma u_e + 3 \Sigma u_k + 14 \Sigma u_s - 128 u_m\} - \frac{1}{3} h^2 \{\Sigma \Delta u_k - \Sigma \Delta u_s + 84 \Delta u_m\} - \frac{3}{2} h^4 \Delta \Delta u_m$	8. Ordnung
8.	$\{\Sigma u_e + 3 \Sigma u_k + 14 \Sigma u_s - 128 u_m\} - \frac{1}{6} h^2 \{\Sigma \Delta u_e + 2 \Sigma \Delta u_s + 160 \Delta u_m\} - \frac{3}{2} h^4 \Delta \Delta u_m$	8. Ordnung

## Die Göttinger elektronischen Rechenmaschinen

Die Göttinger Arbeiten über elektronische programmgesteuerte Rechenmaschinen werden im I. Teil in ihrem Verhältnis zur neueren Entwicklung mathematischer Maschinen charakterisiert. Im II. Teil wird die bandgesteuerte Rechenmaschine im einzelnen beschrieben und ihre Arbeitsweise erläutert. Sie ist mit einem Aufwand von knapp 500 Röhren und 100 Relais erstellt.

In part I, the work that was done in Göttingen in the field of electronic sequence controlled computers, is characterized in its relation to the recent development of mathematical machines. In part II, the tape-controlled machine is described in detail, and its working principles are explained. The computer contains less than 500 vacuum tubes and 100 relays.

Dans la I<sup>ère</sup> part les travaux de Göttingen sur des machines à calcul électroniques dirigées suivant un programme fixe sont caractérisés dans leur relation au développement présent des machines mathématiques. Dans la II<sup>e</sup> part la machine à calcul dirigée par ruban est décrite en détail, et sa manière de fonction est expliquée. Elle est construite avec un appareil d'un peu moins de 500 tubes et d'un peu moins de 100 relais.

В первой части дана характеристика проводимых в Геттингене работ в области электронных программно-управляемых счетных машин по отношению к новейшему развитию математических машин. Во второй части детально описана ленточно-управляемая счетная машина и объясняется ее способ работы. Машина эта построена с затратой менее 500 ламп и 100 реле.

### I. Allgemeines

Von L. Biermann und H. Billing

(Max-Planck-Institut für Physik und Arbeitsgruppe numerische Rechenmaschinen im Institut für Instrumentenkunde in der Max-Planck-Gesellschaft.)

Unter den mathematischen Maschinen lassen sich gegenwärtig zwei Haupttypen unterscheiden, nämlich die nach dem Analogieprinzip arbeitenden Geräte, deren wichtigstes Beispiel die Integrieranlagen darstellen<sup>1)</sup>, und die logisch-mathematischen Maschinen, von denen be-

<sup>1)</sup> In Deutschland besitzt das Institut für praktische Mathematik der TH Darmstadt (Prof. A. Walther) eine ausgebaute Anlage dieser Art.

sonders die elektronischen Rechenmaschinen bekannt geworden sind. Beide Typen gehören in den weiteren Bereich der Kybernetik im Sinne von N. Wiener<sup>3)</sup>.

Innerhalb der zweitgenannten Gruppe kommt neben den Ziffernrechenmaschinen den logistischen Maschinen (im engeren Sinn) in folgender Hinsicht eine besondere Bedeutung zu. Die bisherigen Konstruktionen<sup>3)</sup> zeigen bereits, daß es mit ganz einfachen Mitteln möglich ist den Aussagenkalkül der mathematischen Logik abzubilden und nachzuvollziehen, also, wenn eine etwas unscharfe Ausdrucksweise erlaubt ist, ungefähr den Bereich der aristotelischen Logik. Vorarbeiten, die über diesen Kalkül hinausführen, sind an verschiedenen Stellen geleistet worden<sup>4)</sup>. Es ist sicher, daß man mit den heutigen Mitteln weit über den Bereich des Aussagenkalküls hinausgehen kann, und daß — mit gewissen Einschränkungen — auch der Prädikatenkalkül und damit der weitere Bereich der mathematischen Logik entsprechenden Geräten zugänglich ist. Soweit sich also Teilgebiete der Mathematik als logisch-deduktive Formalismen auffassen lassen, deren Teilaussagen durch kodifizierte Regeln aus den Grundannahmen folgen, werden sie auch der Abbildung und dem Vollzug durch Maschinen zugänglich sein<sup>5)</sup>.

Diese Bemerkung macht deutlich, daß die Ziffernrechenmaschinen — trotz der Möglichkeit, auch allgemeine Probleme mit ihnen anzugreifen — nur eine spezielle Form logisch-mathematischer Maschinen darstellen. Sie verdanken ihre bevorzugte Entwicklung neben der praktischen Bedeutung einiger der numerischen Analysis zugänglichen Probleme vor allem der Tatsache, daß die modernen technischen Mittel eine ins einzelne gehende und sich selbst automatisch modifizierende Steuerung des Arbeitsprogramms mittels umfangreicher Speicher für Befehlsfolgen und Zahlen bei sehr hoher Arbeitsgeschwindigkeit ermöglicht haben. Es ist aber sicher, daß die gleichen Mittel der maschinellen Bearbeitung auch ganz andersartigen Aufgaben (z. B. analytischer Art) zugute kommen würden, deren Lösung durch die große Zahl der eingehenden Bestimmungsstücke oder der notwendigen Operationen erschwert wird.

Innerhalb der praktischen Analysis ergibt sich im Zusammenhang mit der Entwicklung programmgesteuerter Geräte die Aufgabe, die Rechenmethoden den neuen Möglichkeiten anzupassen und sie in dem für jede Aufgabe aufzustellenden Rechenprogramm zu realisieren. Es ist leicht, Beispiele dafür zu geben, daß bisher übliche Näherungsverfahren nicht mehr zweckmäßig sind, da sie die Vorteile der Programmsteuerung nicht auszunutzen gestatten, während andere Verfahren, deren praktische Durchführung bisher etwa an dem Umfang der Rechenarbeit scheiterte, jetzt neue Möglichkeiten eröffnen<sup>6)</sup>. Die Entwicklung der mathematischen Verfahren und die technische Entwicklung müssen daher Hand in Hand miteinander vor sich gehen.

Die in den nächsten Arbeiten dieser Folge beschriebenen Geräte, die von der Arbeitsgruppe numerische Rechenmaschinen im Institut für Instrumentenkunde in der Max-Planck-Gesellschaft in enger Zusammenarbeit mit der astrophysikalischen Abteilung des Max-Planck-Instituts für Physik entwickelt worden bzw. noch in Entwicklung begriffen sind, gehören in den Bereich der programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschinen. Als erstes wurde nach längeren Vorarbeiten, die sich z. T. auch auf Geräte ganz andern Typs erstrecken, um 1949/1950 mit dem Bau einer größeren mittelschnellen Maschine begonnen, welche als Speicher eine Magnettrommel besitzt, die schon früher entwickelt worden war<sup>7)</sup>. Die Trommel ist eingerichtet zur Aufnahme von 2048 Dualzahlen zu je 32 Stellen (äquivalent 10stelligen Dezimalzahlen). Ein beliebiger Teil der Zahlenspeicher kann auch zur Aufnahme der Rechenkommandos dienen. Die Maschine kann die Rechenkommandos auf Grund vorangehender Rechenergebnisse selbständig abändern, so daß sie die Flexibilität der großen modernen Rechenautomaten haben dürfte. Die Fertigstellung dieser Maschine, deren Bau ziemlich weit vorgeschritten ist, ist für 1953 vorgesehen.

Während der Planungsarbeiten an der eben erwähnten Maschine ergab sich die Frage nach der Nützlichkeit einer kleineren programmgesteuerten Maschine. Der Abstand zwischen der Leistungsfähigkeit größerer programmgesteuerter Maschinen und der einer normalen Tisch-Rechenmaschine ist so groß, daß es sinnvoll schien zu untersuchen, wo die untere Grenze des elektronischen Aufwandes liegt, mit dem bereits eine größenordnungsmäßige Überlegenheit erzielt wird. Ebenso sollten in noch höherem Maße der Betriebssicherheit dienende Rücksichten

<sup>3)</sup> N. Wiener, *Cybernetics, Control and Communication in the animal and in the machine*. Cambridge, Mass., 1949. *The Human Use of Human Beings*, London 1950.

<sup>3)</sup> Durch K. Zuse (1944 unveröffentlicht, vgl. folgende Anmerkung) sowie D. M. McCallum und J. B. Smith, *Electronic Engineering* 1951 p. 126 u. 458.

<sup>4)</sup> s. z. B. K. Zuse, *Archiv für Mathematik* 1, 441 (1948). Herrn Zuse danken wir für die Möglichkeit in unveröffentlichte Arbeiten über diesen Gegenstand Einsicht zu nehmen.

<sup>5)</sup> Eine Bearbeitung des hierdurch angedeuteten Problemkreises (speziell der den Maschinen gesetzten Grenzen) auf der Grundlage der Theorie der „berechenbaren“ Funktionen (im Sinne von A. M. Turing, *Proc. London Math. Soc.* 42, 230 (1937), s. auch R. Peter, *Rekursive Funktionen*. Budapest 1951) ist in Angriff genommen.

<sup>6)</sup> Im Bereich der Quantenmechanik der Moleküle hat A. v. Mohrenstein eine solche Untersuchung hier durchgeführt.

<sup>7)</sup> H. Billing, *Numerische Rechenmaschine mit Magnetophonspeicher*, *Z. angew. Math. Mech.* 29 (1949) S. 1.



genommen werden, und die Programmfertigung sollte möglichst einfach durchführbar sein. Es zeigte sich, daß mit einem Aufwand von knapp 500 Elektronenröhren und einer kleinen Magnettrommel für etwa  $10^2$ – $10^3$  zehnstellige Dezimalzahlen allgemein gesprochen etwa die Leistungsfähigkeit mittelgroßer Relais-Maschinen, wie sie jetzt noch an mehreren Stellen in Gebrauch oder im Bau sind, erreichbar sein dürfte. Allerdings mußte hierbei auf die Möglichkeit, die Befehle während des Ablaufs der Rechnung automatisch zu ändern, verzichtet werden.

Die nun fertiggestellte Maschine (s. die folgende Arbeit) ist demgemäß kein verkleinertes Abbild der noch im Bau befindlichen größeren, sondern eine eigene Entwicklung auf Grund der eben dargestellten Gesichtspunkte. Beide Maschinen arbeiten im reinen Dualsystem mit automatischer Übersetzung aus dem bzw. ins Dezimalsystem bei der Eingabe bzw. Ausgabe. Die arithmetischen Grundoperationen werden bei beiden Maschinen in Serienform ausgeführt. Das bedeutet im wesentlichen, daß bei Additionen die einzelnen Ziffern der Summanden zeitlich nacheinander von der niedrigsten Stelle beginnend addiert werden. Bei Parallelmaschinen werden alle Ziffern des Addenden gleichzeitig addiert und bei der Addition anfallende Überträge nachträglich behandelt.

## II. Die Göttinger bandgesteuerte Rechenmaschine G 1

Von H. Billing, W. Hopmann, A. Schlüter

(Arbeitsgruppe numerische Rechenmaschinen und Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen.)

### Übersicht über Aufbau und Leistung der Maschine

Die wesentlichen Einheiten der bandgesteuerten Rechenmaschine sind (Bild 1):

1. Der statische Speicher. Er dient zur Aufnahme von numerischen Eingangswerten und Zwischenresultaten und besteht aus einer rotierenden Trommel, deren Oberfläche mit einer magnetisierbaren Schicht bedeckt ist.

2. Das eigentliche Rechenwerk mit dem Akkumulator und den beiden Hilfsregistern *Md* und *Mr*. Im Akkumulator fallen die Resultate der Rechenoperationen an, während die beiden Hilfsregister zur Aufnahme der bei der jeweiligen Rechenoperation benötigten Operatoren — bei der Multiplikation z. B. Multiplikand und Multiplikator — dienen.

3. Der Verteiler. Dieser dient einerseits als Verbindungsglied zwischen statischem Speicher und Rechenwerk. Andererseits wird in ihm zur Aus- und Eingabe die Umwandlung von Dezimal- in Dualzahlen und umgekehrt durchgeführt.

4. Das Ein- und Ausgabewerk. Es dient zum Eingeben von Zahlen und Rechenbefehlen in die Maschine und zum Drucken der Resultate.

Es besteht aus einer Schreibmaschine, deren Tasten zur Eingabe mit Kontakten verbunden sind und zur Ausgabe von Elektromagneten betätigt werden können, und aus einem Satz von Lochbandsendern zur automatischen Eingabe.

5. Das Befehlswerk. Dieses ist das eigentliche Steuerorgan. Es bringt mit Hilfe eines Schaltwellengenerators die vom Eingabewerk einlaufenden Rechenbefehle zur Ausführung.

6. Das Synchronisationswerk. Es sorgt für die richtige zeitliche Abstimmung der in den einzelnen Maschinenelementen auszuführenden Operationen aufeinander. Es ist starr mit der Speichertrommel gekuppelt, so daß Drehzahlschwankungen der Trommel sich nicht störend auswirken.

Die Rechengenauigkeit der Maschine beträgt 32 Dualziffern, das entspricht fast 10 Dezimalziffern. Das Rechenwerk rechnet mit festem Komma, welches hinter die erste Dezimalziffer gelegt wurde. Jedoch darf die erste Dezimalziffer nicht größer als 7 sein. Der Rechenbereich liegt also zwischen  $\pm 7,999999999$ . Bei Überschreiten des Rechenbereichs ertönt eine Warnung bzw. beim Arbeiten mit Programmsteuerung wird der Ablauf der Rechnung unterbrochen. Sämtliche Rechenoperationen werden in Serienform durchgeführt. Dies bringt gegenüber Parallelmaschinen neben einer erheblichen Verringerung des technischen Aufwandes den Vorteil, daß bei Ausfall eines einzigen Schaltelementes die Rechnung praktisch immer völlig verdorben wird, so daß der Ausfall sofort auffällt.

Das Rechenwerk der Maschine enthält spezielle Einheiten für Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und das Ziehen der Quadratwurzel. Bei der Multiplikation wird zunächst das 20stellige Produkt errechnet, aber anschließend automatisch auf 10 Stellen abgerundet.

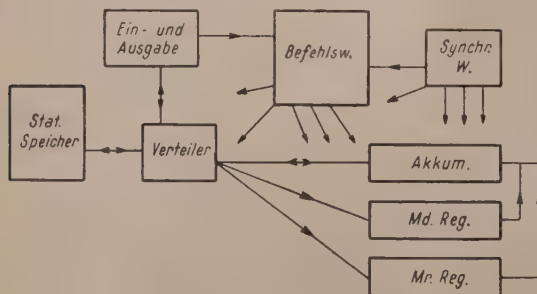


Bild 1. Aufbau der Maschine

Auf Vermeidung systematischer Abrundungsfehler wurde großer Wert gelegt. Einzelheiten über die Rechenkommandos, wie über die Dauer ihrer Durchführung werden im Abschnitt „Befehlsplan“ besprochen.

Der statische Speicher der Maschine enthält Platz zur Aufnahme von 26 Zahlen zu je 32 Dualziffern. Jeder dieser 26 Zahlenspeicher ist im Laufe der Rechnung auf Kommando hin nach spätestens  $\frac{1}{50}$  Sekunde aufrufbar zur Entnahme bzw. Eingabe. Bei der Eingabe in einen bereits von früher her gefüllten Speicher wird der vorherige Inhalt automatisch gelöscht. Der Speicherinhalt bleibt auch bei Abschalten der Maschine erhalten. Als zusätzliche Zahlenspeicher können die ohnehin zur Programmsteuerung vorgesehenen Lochbänder verwendet werden, da es möglich ist, Zwischenresultate in ein Lochband zu lochen und sie auch wieder vom Lochband automatisch abzulesen. Das Ablesen vom Lochband ist aber nur in der Reihenfolge möglich, in der die Zahlen gelocht sind. Wenn man die einzugebenden Zahlen auf verschiedenen der insgesamt 4 Lochbänder unterbringt, bleibt noch die Wahlmöglichkeit, welches der Lochbänder man jeweils ablesen will.

Die Eingabe von Zahlen bzw. von Rechenkommandos ist auf zwei verschiedene Weisen möglich.

1. Eingabe vom Tastenfeld einer Schreibmaschine aus: Zur Eingabe von Zahlen und von Rechenkommandos, wie zum Ausschreiben von Resultaten wird eine handelsübliche Schreibmaschine mit elektrischem Antrieb (Mercedes Electra) verwendet. Unter den Tasten dieser Maschine sind zusätzlich Kontakte angebracht. Nach Anschlagen der gewünschten Taste wird einerseits wie bei jeder Schreibmaschine das angeschlagene Zeichen auf das gespannte Protokollpapier geschrieben. Andererseits wird durch Schließen des mit der Taste verbundenen Kontaktes die zugehörige Ziffer bzw. das zugehörige Rechenkommando der Rechenmaschine zugeleitet und löst dort durch Betätigen eines Relais die gewünschte Operation aus.

Dieses Verfahren bietet den Vorteil, daß beim Rechnen vom Tastenfeld aus das zugehörige Rechenprotokoll automatisch mitgeschrieben wird. Um Rechenfehler auszuschließen, die durch zu schnelle Aufeinanderfolge von zwei Tastenanschlägen auftreten könnten, wird das gesamte Tastenfeld während der Ausführung eines Befehles blockiert. Dies wirkt sich praktisch nur bei den Befehlen Multiplikation, Division und Wurzelziehen aus, da sämtliche anderen Befehle in weniger als  $\frac{1}{10}$  Sekunde ausgeführt werden.

Die Maschine rechnet stets mit zehnziffriger Genauigkeit. Um die Eingabe von Zahlen zu erleichtern, werden für Rechnungen mit kleinerer Genauigkeit die „nicht bedeutsamen“ Nullen am Ende einer Dezimalzahl automatisch angehängt. Dies wird dadurch erreicht, daß das Vorzeichensymbol „positiv oder negativ“ ( $p$  oder  $n$ ) am Ende der Zahl eingegeben wird. Mit der Eingabe des Vorzeichensymbols ist das Anhängen der nicht bedeutsamen Nullen automatisch gekoppelt. Anschlagen der Tastenfolge  $783p$  bedeutet mithin Eingabe der Zahl  $+7,830000000$ . Um das Rechenprotokoll übersichtlich zu gestalten, wird nach Eingabe jeder Zahl (und zwar nach dem Vorzeichen) wie nach Eingabe logisch zusammenhängender Befehlsgruppen (siehe Tabelle 1) automatisch ein Zwischenraum im Protokoll gelassen.

2. Eingabe vom Befehlsband aus: Der Einsatz elektronischer Rechenmaschinen zur Durchführung längerer Rechnungen lohnt sich nur, wenn sich der Rechengang so gestalten läßt, daß eine im Vergleich zur ganzen Rechnung kurze Folge von Rechenbefehlen immer wieder auf neue Eingangswerte bzw. auf bei der Rechnung angefallene Zwischenresultate angewandt wird. Ein Musterbeispiel für derartige Rechnungen ist die Iteration.

Zur Eingabe sich wiederholender Befehlsfolgen werden Lochbänder benützt, die an den Enden zu einem endlosen Band zusammengeklebt werden können. Zur Vereinfachung der Konstruktion wurde das handelsübliche in Fernschreibern verwendete Lochband eingesetzt, welches in jeder Zeile bis zu 5 Löchern enthalten kann. Dies ergab den Vorteil, daß für die Herstellung wie für das Abtasten der Lochbänder handelsübliche Geräte der Firma Lorenz nach unbedeutenden Abänderungen unmittelbar verwendet werden konnten. Die Anzahl von 5 Lochmöglichkeiten in einer Zeile gestattet die Darstellung von  $2^5 = 32$  verschiedenen Zeichen. Eine hinter dem Abtaster des Lochstreifensenders geschaltete Relaispyramide mit 5 Eingängen und 32 Ausgängen bewirkt, daß entsprechend der jeweiligen Lochkombination in der abgetasteten Zeile der zugehörige Ausgang der Pyramide unter Strom gesetzt wird. Dieser Strom betätigt das gleiche Relais, das bei Arbeiten von der Tastatur aus sonst bei Drücken der zu dem betreffenden Befehl gehörenden Schreibmaschinentaste erregt wird.

Der Lochstreifenabtaster tastet normalerweise 7 Zeilen pro Sekunde ab. Die meisten Operationen können von der Rechenmaschine in der Zwischenzeit ausgeführt werden. Bei Operationen, die längere Zeit benötigen, wartet der Lochstreifenabtaster automatisch bis zur Beendigung der Ausführung.

Bei größeren Rechnungen ist ein einzelnes Lochband nicht ausreichend, vor allem, wenn ein Lochband noch als zusätzlicher Zahlenspeicher benutzt werden soll. Einbau von insgesamt



4 Eingabelochbändern ist vorgesehen. Bei endlos zusammengeklebten Befehlsbändern kann man das Band durch einen eingelochten Bandbefehl am Ende jedes Umlaufs anhalten lassen. Der Rechner kann dann auf Grund der während des Befehlszyklus gedruckten Resultats entscheiden, ob der Zyklus noch einmal wiederholt werden oder zu einem anderen Befehlsband übergegangen werden soll. Auf Einbau eines konditionellen Entscheidungsbefehles wurde verzichtet. Derartige konditionelle Befehle werden in den großen Rechenautomaten verwendet, um entsprechend dem im vorangehenden Rechengang errechneten Vorzeichen einer Zahl einen Befehlszyklus zu wiederholen oder im Hauptprogramm fortzufahren. Bei der relativ niedrigen Rechengeschwindigkeit dieser Göttinger Maschine erschien es nicht lohnend, dem Rechner diese Entscheidung mittels eines Automaten abzunehmen. 2 Glimmlampen zeigen dem Rechner laufend das Vorzeichen der im Akkumulator befindlichen Zahl an, so daß es zum Treffen der Entscheidung nicht nötig ist, den Akkumulatorinhalt für diesen Zweck auszudrucken. Der Übergang zu einem anderen Band kann auch automatisch mittels eines in das erste Band gelochten Befehls bewirkt werden. Dieses ist z. B. wertvoll, wenn man einen speziellen Befehlsgang mehrere Male an verschiedenen Stellen in den Hauptbefehlsgang einbauen will.

Die Herstellung der Lochbänder kann von der Schreibmaschinentastatur der Mercedes-Electra aus erfolgen. Zu diesem Zweck sind die 32 von der Schreibmaschine her erregbaren Eingaberelais über eine Gleichrichterpyramide mit 32 Eingängen und 5 Ausgängen derartig mit den 5 Eingängen eines Bandlochers verbunden, daß bei Niederdrücken einer Schreibmaschinentaste unmittelbar die entsprechende Lochkombination gelocht wird. Auf ganz ähnliche Weise können auch errechnete Resultate — zusätzlich zum Ausdrucken — in das Band gelocht werden. Jede Zeile im Lochband entspricht dabei einer Dezimalziffer.

Diese Herstellungsart eines Befehlsbandes hat den Vorteil, daß

1. das Protokoll für das Befehlsband automatisch mitgeschrieben wird und
2. von der Rechenmaschine während der Lochbandherstellung die einzelnen befohlenen Operationen gleichzeitig ausgeführt werden, so daß man bei Beendigung der Lochbandherstellung einen vollen Befehlszyklus mitgerechnet hat. Das kann für die Kontrolle der Richtigkeit des Befehlsprogrammes sehr nützlich sein.

Ein Nachteil dieser Herstellungsart besteht darin, daß die Rechenmaschine für die Dauer der Lochbandherstellung nicht für andere Zwecke benutzt werden kann. Durch Verwendung eines zusätzlichen Handlochers, der unabhängig von der Rechenmaschine zur Lochbandherstellung benutzt werden kann, ließe sich dieser Nachteil leicht vermeiden.

Zyklische Vertauschung von Speicherplätzen: Um die Zerlegung eines Rechenganges in eine sich vielfach wiederholende gleichbleibende Befehlsfolge zu erleichtern sind 16 der statischen Speicher in 4 Gruppen zu je 4 Speichern aufgeteilt. Diese Speicher sind bezeichnet mit  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0 \dots b_3; c_0 \dots c_3; d_0 \dots d_3$ . Durch einen gesonderten Befehl: „Zyklische Vertauschung“ kann der Inhalt eines jeden Speichers einer Gruppe in den Speicher mit der nächst höheren Nummer derselben Gruppe verschoben werden, wobei die Nummer 3 + 1 identisch 0 ist. Es wird also bei dieser zyklischen Vertauschung folgende Verschiebung der Speicherinhalte bewerkstelligt  $\langle a_0 \rangle \rightarrow a_1 \langle a_1 \rangle \rightarrow a_2 \langle a_2 \rangle \rightarrow a_3 \langle a_3 \rangle \rightarrow a_0$ .  $\langle a_0 \rangle$  bedeutet Inhalt des Speichers  $a_0$  vor der Vertauschung.

Eine naheliegende Anwendung ergibt z. B. die punktweise Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Die Lösung sei bekannt für die Punkte,  $x_{n-1}, x_n$ . Die zugehörigen Lösungswerte seien in die Speicher  $b_1, b_0$  gegeben. Das zur Lösung der Differentialgleichung angewandte numerische Verfahren ergibt das Rechenprogramm, um aus den Lösungen für die Abszissen  $x_{n-1}, x_n$  die Lösung für die Abszisse  $x_{n+1}$  zu berechnen. Diese Lösung wird nach  $b_3$  eingeschrieben. Wenn jetzt der Befehl „zyklische Vertauschung“ folgt, stehen hinterher die Lösungswerte für  $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$  in den Speichern  $b_2, b_1, b_0$ . Man kann jetzt genau den gleichen Befehlsgang ein zweites Mal anwenden, um die Lösung für  $x_{n+2}$  zu berechnen usw. Im Anhang ist ein derartiges Beispiel genauer ausgeführt.

Zum Drucken von Resultaten wird die Schreibmaschine verwendet. Unter den Tasten für die Ziffern 0 bis 9 wie für die Vorzeichensymbole  $p$  und  $n$  sind Elektromagnete angebracht, welche von der Rechenmaschine her zum Ausdrucken der in Dezimalform umgewandelten Resultate erregt werden. Nach jeder ausgedruckten Zahl wird automatisch ein Zwischenraum geschrieben. Zum Ausschreiben von Tabellen ist ein Zahlenzählwerk eingebaut, welches nach einer einstellbaren Anzahl von in einer Zeile ausgeschriebenen Zahlen (bis zu 20) den Wagenrücklauf der Schreibmaschine betätigt. Die Anzahl der pro Zahl auszuschreibenden Ziffern ist von Hand aus willkürlich einstellbar (1—10 Ziffern). Dabei muß jedoch berücksichtigt werden, daß die Zahl beim Ausschreiben nicht abgerundet, sondern einfach abgebrochen wird, so daß man zweckmäßigerweise die Anzahl der auszuschreibenden Ziffern nicht zu sparsam bemißt.

Dies ist die einzige Stelle in der Rechenmaschine, wo auf Abrundung verzichtet wird. Da einmal ausgeschriebene Zahlen jedoch kaum vielfach in einem Befehlszyklus wieder verwendet werden, dürfte der hierdurch entstehende systematische Fehler keine Rolle spielen.

### Hauptteile der Maschine

Der statische Speicher dient zur Aufnahme von 26 in Dualform umgewandelten Zahlen zu je 32 Dualziffern. Die Anzahl von 26 Speicherplätzen ist ein wenig knapp. Eine Steigerung der Speicherkapazität auf 100 oder 1000 Speicherplätze würde bei einem Neubau der Maschine ohne merklich erhöhten Aufwand möglich sein. Der Speicher ist technisch realisiert durch eine mit 50 U/sek rotierende zylindrische Trommel, die mit einer magnetisierbaren Schicht bedeckt ist. Ihre Oberfläche rotiert an Elektromagneten vorbei, die zum Einschreiben der Zahl wie zum Ablesen benützt werden. Ein zu einem einzelnen Schreibmagneten gehörender um den Trommelumfang herumlaufender Streifen der Trommeloberfläche wird eine Spur genannt. Jede Spur enthält Platz zur Aufnahme von 4 Zahlen zu je 32 Dualziffern, einer zusätzlichen Vorzeichenziffer und 3 Leerziffern. Letztere werden als Pufferraum zwischen den Speichern bzw. zum Erkennen einer Rechenbereichsüberschreitung benötigt. Beim Ablesen der Zahlen aus den statischen Speichern wie in allen internen Verbindungsleitungen der Rechenmaschine werden die Zahlen dargestellt durch Impulszüge, bei welchen die Einsen durch Impulse und die Nullen durch Fehlen von Impulsen wiedergegeben werden. Der niedrigste Dualziffernwert der Position  $2^{-29}$  erscheint zuerst. Es folgen die Positionen  $2^{-28}$  bis  $2^{+2}$  und schließlich in der Position  $2^{+5}$  die Vorzeichenziffer. Einzelheiten über den Speicher sind im Abschnitt „Speichertrommel“ zu finden.

Der Akkumulator ist das eigentliche Rechenelement der Maschine. Er erhält ein Addierwerk, welches ermöglicht, daß eine dem Akkumulator zugeführte Zahl zum vorherigen Akkumulatorinhalt hinzuaddiert bzw. -subtrahiert wird. Da bei der Multiplikation Zahlen von doppelter Länge anfallen, ist der Akkumulator zur Aufnahme einer 72stelligen Dualzahl befähigt. Der Akkumulator enthält — wie auch die drei Register Verteiler, *Md* und *Mr* — je einen dynamischen Speicher. Ein dynamischer Speicher<sup>7)</sup> enthält (vgl. Bild 2) einen Schreibmagnet *S*, der die zu speichernde Zahl in eine Spur der Magnettrommel eingibt. Um einen gewissen Winkel versetzt — beim Akkumulator eine halbe Trommelumdrehung — befindet sich auf derselben Trommelspur ein Lesemagnet *L*, der nach einer in diesem Fall zwei Zahlenlängen entsprechenden Zeit den eingeschriebenen Dualzahlenzug wieder abliest. Der abgelesene Impulszug wird verstärkt, wobei unvermeidliche kleine Formänderungen der Impulsgestalt automatisch regeneriert werden, und wird schließlich dem Schreibkopf wieder zugeführt. Auf dem Rückweg vom Lese- zum Schreibkopf werden die auf die Trommel aufgeschriebenen Impulse dieser Spur durch das Gleichfeld eines Löschmagneten gelöscht. Der eingegebene Impulszug läuft damit in dem aus Schreibkopf — Magnetschicht — Lesekopf und Verstärker gebildeten Kreis bis zu seiner willkürlichen Löschung durch Unterbrechen dieses Kreises unverändert um. Beim Akkumulator ist vor dem Schreibkopf ein Addiergerät eingefügt. Über den zweiten Eingang des Addiergerätes kann zu der im Akkumulator umlaufenden Zahl eine andere vom statischen Speicher her als Ziffernzug einlaufende Zahl addiert bzw. subtrahiert werden. Die Subtraktion wird entsprechend durch Addition der Komplementzahl vorgenommen.

Der Verteiler: Bei der Addition vom statischen Speicher zum Akkumulator müssen gleichwertige Ziffernpositionen der beiden zu addierenden Impulszüge zu gleicher Zeit an den beiden Eingängen des Addiergerätes zusammentreffen. Da der Ziffernzug im Akkumulator mit der Periode von zwei Zahlenlängen umläuft, die 4 in einer Spur des statischen Speichers untergebrachten Zahlen aber nur eine Dauer von einer Zahlenlänge haben, ergibt sich die Notwendigkeit, aus dem 1. und 3. Quadranten des statischen Speichers entnommene Ziffernzüge vor Addition zum Akkumulator um eine volle Zahlenlänge zu verzögern. Diesem Zweck dient der Verteiler (Bild 2), und zwar in ihm der von *L1* nach *S* geschlossene Kreis von der Umlaufdauer einer Zahlenlänge. Auch bei der Rückführung einer Zahl vom Akkumulator zum Zahlenspeicher wie bei einer Überführung vom Zahlenspeicher zum *Md*- bzw. *Mr*-Register ergibt sich die gleiche Notwendigkeit der Verschiebung um eine Zahlenlänge. Daher werden alle vom statischen Speicher entnommenen oder in ihn hineingeschriebenen Zahlen zunächst durch den Verteiler gelenkt. Für den Befehl „zyklische Vertauschung“ wird die notwendige Verschiebung des Inhalts einer gesamten Spur um eine Zahlenlänge ebenfalls mittels des Verteilers vorgenommen.

Das *Md*- und *Mr*-Register werden zur Multiplikation, Division und zum Quadratwurzelziehen benötigt. Beide sind dynamische Register von 2 Zahlenlängen Umlaufdauer.

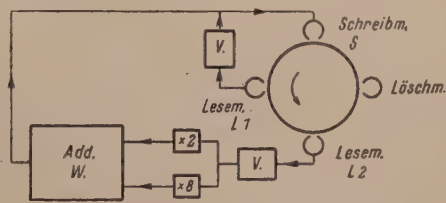


Bild 2. Dynamischer Speicher



Jedoch kann die Umlaufsdauer durch eine einfache elektronische Schaltung auf Befehl hin in  $Mr$  um eine Ziffernlänge verlängert und in  $Md$  um eine Ziffernlänge verkürzt werden. Das bedeutet, daß bei Betätigung der elektronischen Schaltung bei jedem Umlauf der Inhalt von  $Mr$  bzw.  $Md$  mit  $2^{+1}$  bzw.  $2^{-1}$  multipliziert wird. Zur Multiplikation nimmt  $Mr$  den Multiplikator und  $Md$  den Multiplikanden auf. Die Multiplikation geschieht dann auf die gewöhnliche Weise durch Addition der Partialprodukte zum Akkumulatorinhalt bei Verschiebung des Multiplikanden um jeweils eine Ziffernlänge pro Addition.

Die *Division* wird nach dem von v. Neumann<sup>8)</sup> beschriebenen Verfahren durchgeführt, welches für maschinelle Division im Dualsystem besonders geeignet ist. Der Dividend wird dabei zunächst in den Akkumulator und der Divisor nach  $Md$  verbracht. Der errechnete Quotient wird Ziffer für Ziffer in  $Mr$  aufgebaut und am Schluß der Operation nach Löschung des Restes des Dividenden zum Akkumulator überführt.

Das zum *Wurzelziehen* verwendete Verfahren ist von Zuse<sup>9)</sup> angegeben worden. Der Radikand steht dabei zunächst im Akkumulator. Die Wurzel selbst wird aus technischen Gründen in  $Md$  und  $Mr$  gleichzeitig aufgebaut und ersetzt zum Schluß im Akkumulator den Radikanden.

*Ein- und Ausgabewerk* stellen die Verbindung zwischen Rechner und Maschine dar. Das Eingabewerk dient der Eingabe von Zahlen und Kommandos von der Schreibmaschinentastatur oder den Befehlsbändern her, während das Ausgabewerk lediglich Resultate druckt bzw. ins Lochband locht. Bei Zahleneingabe und -Ausgabe wird die notwendige Umwandlung vom Dezimal- ins Dualsystem und umgekehrt in dem langen Zyklus des Verteilers durchgeführt (Weg L2 nach S Bild 2). Näheres hierüber findet sich im Abschnitt Ein- und Ausgabe.

Das *Befehlswerk* bildet das technische Bindeglied, welches die vom Eingabewerk her eingegebenen Kommandos zur Ausführung bringt. Es enthält die von den Schreibmaschinentasten bzw. Lochbandabtastern her erregten Relais und den Schaltwellengenerator, der die zum jeweiligen Befehl zugehörigen Schaltwellen herstellt, welche zu den richtigen Zeiten die zu dem betreffenden Befehl gehörenden Verbindungswege zwischen den Recheneinheiten öffnen bzw. die Recheneinheiten steuern. Die Relais legen also nur den auszuführenden Befehl fest, die eigentliche Operation wird rein elektronisch gesteuert.

Das *Synchronisationswerk* ist als Hilfseinheit für die statischen und dynamischen Speicher, wie für das Befehlswerk anzusprechen. Es besteht aus der Uhr und einigen Zählwerken. Die Uhr ist ein fest mit der Speichertrommel verbundenes eisernes Zahnrad mit 144 Zähnen, welches in gleichen Abständen pro Trommelumdrehung 144 Impulse abgibt. In den Speichern werden die Uhrimpulse verwendet, um die an den dortigen Lesemagneten anfallenden gestaltmäßig und zeitlich schwach verformten Ziffernimpulse zu scharfen Impulsen zu regenerieren, die mit den zugehörigen Uhrimpulsen koinzidieren. Die Zählwerke des Synchronisationswerkes dienen dem Zweck, die 144 Impulse pro Trommelumdrehung und zusätzlich die seit Beginn eines Befehles abgelaufene Anzahl von Trommelumdrehungen abzuzählen, so daß es möglich ist, die Schaltwellen des Befehlswerkes bei Abstimmung auf die jeweilige Trommelstellung zu den richtigen Zeiten beginnen und enden zu lassen.

### Befehlsplan

Insgesamt werden 31 Tasten der Schreibmaschine und die Zwischenraumtaste zur Steuerung der Maschine verwendet. Jeder Taste entspricht eine bestimmte Lochkombination auf dem Befehlsband. Die Tasten sind bezeichnet mit den 10 Ziffern 0, ..., 9, den beiden Vorzeichen (die mit  $p$  bzw.  $n$  bezeichnet sind, um Verwechslungen mit dem Additions- bzw. Subtraktionszeichen zu vermeiden), den Buchstaben  $a, b, c, d$ , und den Zeichen  $+ - m \times \div : DL ] \vee h \rightarrow BFI$ . Ein Befehl besteht im allgemeinen aus mehreren Tastenanschlägen. Die in Frage kommenden Kombinationen von Tastenanschlägen sind in dem Befehlsplan (Tabelle 1) angegeben. Einige andere nicht aufgeführte Kombinationen sind auch noch erlaubt, bieten aber keine wesentlichen neuen Möglichkeiten.

Eine Zahl  $Z$  ( $|Z| < 8$ ) wird in die Maschine eingegeben, indem zunächst die Stelle vor dem Komma (auch wenn sie gleich Null ist), dann höchstens 9 weitere Stellen durch Anschlag der entsprechenden Zifferntasten und zum Schluß das Vorzeichen ( $p$  oder  $n$ ) einzeln eingegeben werden. Die Zahl wird dabei ziffernweise im Verteiler als Dualzahl aufgebaut. Wenn weniger als 10 Ziffern eingegeben werden, werden bei Eingabe des Vorzeichens die fehlenden Ziffern als Nullen automatisch ergänzt.

<sup>8)</sup> Preliminary Discussions of the logical Design of an Electronic Computing Instrument by A. W. Burks Goldstine, v. Neumann, Institute for Advanced Study Princeton 1947.

<sup>9)</sup> Rutishauser, Speiser, Stiefel, Programmgesteuerte digitale Rechengegeräte. Z. angew. Math. Phys. 1 (1950), S. 356.

Tabelle 1. Befehlsplan für die bandgesteuerte Rechenmaschine G1.

Angegeben ist der Inhalt der Register  $A$  (Akkumulator),  $M$  (Multiplikandenregister) und  $z$  (Zahlspeicher) ausgedrückt durch den Inhalt vor Ausführung des Befehls (in  $\langle \rangle$ ). — = keine Änderung; 0 = Löschung. Speicherplätze  $z = 0, \dots, 9$  und (zyklische Speicher)  $a0, \dots, a3; b0, \dots, b3; c0, \dots, c3; d0, \dots, d3$ .  $Z$  bedeutet eine höchstens 10-stellige Dezimalzahl, die ziffernweise eingegeben wird, beginnend mit der Stelle vor dem Komma ( $\leq 7$ ) und endend mit der Eingabe des Vorzeichens ( $p$  oder  $n$ ).

Operationen mit eingegebenen Zahlen					Operationen mit gespeicherten Zahlen				
Nr.	Befehl	A	M	z	Nr.	Befehl	A	M	z
1a	Z +	$\langle A \rangle + Z$	—	—	1b	+ z	$\langle A \rangle + \langle z \rangle$	—	—
2a	Z —	$\langle A \rangle - Z$	—	—	2b	— z	$\langle A \rangle - \langle z \rangle$	—	—
3a <sup>1</sup>	Z m	—	Z	—	3b <sup>1</sup>	mz	—	$\langle z \rangle$	—
4a	Z ×	$\langle A \rangle + Z \cdot \langle M \rangle$	0	—	4b	× z	$\langle A \rangle + (\langle z \rangle \cdot \langle M \rangle)$	0	—
5a	Z ÷	$\langle A \rangle - Z \cdot \langle M \rangle$	0	—	5b	÷ z	$\langle A \rangle - (\langle z \rangle \cdot \langle M \rangle)$	0	—
6a	Z :	$\langle A \rangle : Z$	0	—	6b	: z	$\langle A \rangle : \langle z \rangle$	0	—
7a	Z → z	—	—	Z	7b	→ z	0	—	$\langle A \rangle$
8a	Z D	—	—	—	8b	Dz	—	—	—
Drucke die Zahl Z					Drucke die Zahl $\langle z \rangle$				
9a	Z L	—	—	—	9b	Lz	—	—	—
Drucke und loche die Zahl Z					Drucke und loche die Zahl $\langle z \rangle$				
Andere Operationen									
10 <sup>1</sup>	]	0	$\langle A \rangle$	—	13	a	zyklische Vertauschung	$\langle a0 \rangle \rightarrow a1$	
11	√	$\sqrt{\langle A \rangle}$	—	—		b, c, d	entsprechend	$\langle a1 \rangle \rightarrow a2$	
12	h	$\langle A \rangle : 2$	—	—				$\langle a2 \rangle \rightarrow a3$	
								$\langle a3 \rangle \rightarrow a0$	
14	Ba	Start Lochband a							
	Bb, Bc, Bd	entsprechend							
15	F	Lochband halt							
16	I	Überlochen einer Fehllochung und Löschung eines Vorbefehls							

<sup>1)</sup> hiernach soll Befehl 4) oder 5) folgen.

Mit der jetzt im Verteiler befindlichen Zahl  $Z$  kann nun direkt gerechnet werden. Nach dem Anschlagen der  $+$  oder  $-$  Taste (Befehl 1a bzw. 2a) wird  $Z$  zum Inhalt des Akkumulators (der im Befehlsplan durch  $A$  angedeutet ist) hinzugezählt bzw. von ihm subtrahiert. Durch Anschlag der Taste  $m$  (Befehl 3a) wird nach der Eingabe einer Zahl diese ins Multiplikandenregister gebracht und steht dort zur Multiplikation bereit. Die Multiplikation einer eingegebenen Zahl mit einer Zahl, die im  $Md$ -Register steht, wird durch den Befehl 4a oder 5a bewirkt; beim Befehl 4a wird das Produkt mit 64stelliger Genauigkeit zum Akkumulatorinhalt addiert, beim Befehl 5a dagegen subtrahiert. Division des Akkumulatorinhaltes durch eine eingegebene Zahl wird dadurch bewirkt (Befehl 6a), daß man nach der Eingabe der Zahl die Taste  $:$  anschlägt.

Man kann die eingegebene Zahl aus dem Verteiler in einen beliebigen der 26 Speicher schaffen (Befehl 7a), indem man nach der Eingabe der Zahl die Taste  $\rightarrow$  und anschließend die gewünschte Speichernummer anschlägt. Soll die Zahl in einen der „gewöhnlichen“ Speicher gebracht werden, schlägt man die betreffende der 10 Zifferntasten an; soll sie in einen zyklischen Speicher kommen, wählt man zunächst durch Anschlag eines der Buchstaben  $a, \dots, d$  die betreffende Spur und dann durch eine der Zifferntasten  $0, \dots, 3$  den entsprechenden Sektor. Das Symbol  $z$  im Befehlsplan bedeutet also entweder eine der Ziffern  $0, \dots, 9$  oder eine dieser 16 Kombinationen. Bei der Ausführung dieses Befehls wird die zuvor im Speicher  $z$  befindliche Zahl gelöscht, die übrigen Register der Maschine bleiben unberührt.

Die Befehle 8a) und 9a) besitzen nur geringes praktisches Interesse. Durch Befehl 8a wird die Zahl wieder in eine Dezimalzahl zurückverwandelt und ausgedruckt. Sie ist damit aus der Maschine verschwunden und steht zu weiteren Rechnungen nicht mehr zur Verfügung. Bei Befehl 9a wird sie außerdem ins Ergebnisband gelocht.

Gemeinsam ist allen Befehlen, die mit gerade eingegebenen und dann im Verteiler stehenden Zahlen sofort weiter operieren, daß auf die Eingabe unmittelbar das Operationssymbol folgt. Der Befehl wird dann sofort ausgeführt und dabei der Verteiler gelöscht.

Wird dagegen eines der in den Befehlen 1a...9a auftretenden Operationssymbole ohne vorherige Eingabe einer Zahl (also bei leerem Verteiler) gegeben, so wirkt es nur als Vorbefehl und die betreffende Operation wird erst ausgeführt, wenn anschließend eine Speichernummer ( $0, \dots, 9$  bzw.  $a0, \dots, d3$ ) angeschlagen wird. Die Befehle (1b, ..., 9b) werden dann ganz analog mit der im Speicher  $z$  befindlichen Zahl ausgeführt; es sind nur folgende Unterschiede zu bemerken: Befehl 7b schafft bei leerem Verteiler die im Akkumulator befindliche Zahl nach Abrundung auf 32 Dualstellen in den Speicher  $z$  und löscht den Akkumulator dabei, während die Befehle 8b und 9b die im Speicher  $z$  befindliche Zahl ausdrucken (bzw. zusätzlich lochen).



Die Befehle 10, 11, 12 wirken direkt auf den Akkumulatorinhalt, bedürfen daher nur eines Tastenanschlages und werden sofort ausgeführt.

Befehl 10 dient mehr der Bequemlichkeit. Falls der Multiplikand bereits im Akkumulator steht, erlaubt er die Überführung des Multiplikanden vom Akkumulator zum Multiplikandenregister. Dies ist z. B. bei der Bildung mehrfacher Produkte nützlich. Multiplikation der Inhalte der drei Speicher 0, 1, 2 wird z. B. mittels der Tastenanschlüsse  $m0 \times 1 \times 2$  durchgeführt.

Da nach den Befehlen 3a, 3b und 10 das Multiplikandenregister besetzt ist und das Vorzeichen des Multiplikanden bereits im Akkumulator abgesetzt wurde, um dort im Verein mit den Vorzeichen von Multiplikator und Befehl 4 oder 5 die tatsächliche Ausführung der Multiplikation zu steuern, darf zwischen Besetzen des Multiplikandenregisters und Ausführung der Multiplikation keine Addition, Subtraktion, Division und Radizierung liegen. Letztere beiden verbieten sich ohnehin, da sie das Multiplikandenregister benötigen. D. h. praktisch, daß die Multiplikation möglichst hintereinander weg ausgeführt werden soll.

Befehl 11 zieht die Quadratwurzel aus dem Akkumulatorinhalt und überführt das Resultat in den Akkumulator.

Befehl 12 halbiert den Inhalt des Akkumulators.

Befehl 13 führt die bereits besprochene zyklische Vertauschung der 4 in einer zyklischen Speichergruppe befindlichen Speicherinhalte durch. Er ist einzeln anwendbar auf die 4 zyklischen Speichergruppen  $a b c d$ .

Die Befehle 14, 15, 16 dienen der Steuerung der Maschine von einem der 4 vorgesehenen Lochstreifen aus.

Befehl 14 erlaubt das gewünschte Lochband in Betrieb zu setzen oder von einem Band auf ein anderes überzugehen. Wenn der Befehl 14 von einem Lochband aus gegeben wird, so läuft das neue Lochband an und das alte wird automatisch stillgesetzt. Auf diese Weise kann man eine willkürliche Reihenfolge, in welcher die 4 Lochbänder abwechselnd die Kommandierung übernehmen sollen, auf den Lochbändern verschlüsseln.

Befehl 15 bringt das Lochband zum Stillstand, ohne ein neues in Betrieb zu setzen. Dieser Befehl wird durch eine Lochbandzeile gegeben, die in allen 5 Positionen ungelocht ist. Der Anfang eines Lochbandes ist normalerweise nicht gelocht. Um bei Inbetriebsetzung des Lochbandes das Band über diesen ungelochten Teil hinweglaufen lassen zu können, ist der Stoppbefehl 15 technisch so durchgeführt, daß er nur wirksam wird, wenn nach dem Startbefehl 14 von dem betreffenden Band vorher mindestens eine mit Löchern versehene Zeile abgetastet ist.

Bei Eingabe von Zahlen von einem Lochband aus ist es meist erwünscht, nach Ablesen einer einzelnen Zahl automatisch auf ein anderes Band überzugehen, welches kommandiert, wie die abgelesene Zahl im weiteren Rechengang verwendet werden soll. Das Lochband, welches die einzugebenden Zahlen enthält, wird im allgemeinen von einer vorhergehenden Rechnung aus automatisch gelocht worden sein. Dieses hat zur Folge, daß das Zahlenlochband von vornherein zwischen den einzelnen Zahlen den erwünschten Befehl 14 bzw. 15 nicht enthält. Am Ende jeder von der Rechenmaschine her ausgelochten Zahl befindet sich aber ohnehin das Vorzeichensymbol  $p$  bzw.  $n$ . Zum Bandwechsel oder Bandstop nach Eingabe einer Zahl vom Zahlenband her sind daher mit jedem der Bandabtaster von Hand aus setzbare Schalter verbunden, welche bewirken, daß nach Abtasten eines in dem betreffenden Band enthaltenen Vorzeichensymbols automatisch je nach Schalterstellung auf ein gewünschtes anderes Band übergegangen wird oder Stoppbefehl 15 ausgeführt wird oder die Bandabtastung unverändert weiterläuft.

Befehl 16 wird verwendet, wenn beim Lochband ein Irrtum unterlaufen ist. In diesem Fall werden nachträglich alle 5 Lochpositionen der falsch gelochten Zeile mit Löchern versehen. Diese Lochverteilung — sie entspricht Befehl 16 — löst in der Rechenmaschine keine Wirkung aus, die Maschine geht anschließend zum Abtasten der nächsten Bandzeile über.

Fast alle im Befehlsplan angegebenen Rechenoperationen benötigen eine Ausführungsdauer von weniger als  $\frac{1}{7}$  Sekunde. Bei Steuerung von einem Lochband aus beträgt die Abtastgeschwindigkeit 7 Zeichen pro Sekunde, so daß bei all diesen Operationen die Rechengeschwindigkeit durch die Abtastgeschwindigkeit des Lochbandes begrenzt ist. Eine Ausnahme bilden lediglich die Befehle 4, 5, 6, 11. Bei Befehl 4, 5, 6 muß zur Ausführung der Multiplikation bzw. Division nach dem Anschlagen der Zifferntaste  $z$  zusätzlich knapp  $\frac{1}{3}$  Sekunde und nach Befehl 11 zusätzlich knapp  $\frac{2}{3}$  Sekunde bis zur nächsten Befehlsgebung gewartet werden. In diesem Fall wird das Lochband für die Dauer der Befehlsausführung angehalten. Die volle Multiplikation zweier Speicherinhalte — beispielsweise für die Befehlsfolge  $m0 \times 1$  — benötigt etwa  $\frac{4}{7}$  Sekunde  $+ \frac{1}{3}$  Sekunde = 0,9 Sekunden.

### Ein- und Ausgabe

Bei der Zahlen e i n g a b e muß aus der Folge der vom Eingabewerk her eingeschriebenen Dezimalziffern die entsprechende Dualzahl aufgebaut werden. Dies geschieht im Verteiler, der hierzu auf den langen Zyklus von 2 Zahlenlängen geschaltet ist. Folgendes Verfahren wird angewendet: In 9 zusätzlichen statischen Speichern, die sich sämtlich im 1. bzw. 3. Quadranten der Speichertrommel befinden, sind als Umrechnungszahlen die Dualdarstellungen der Zahlen  $1 \times 10^{-10}$  bis  $9 \times 10^{-10}$  auf  $1 \times 2^{-67}$  genau in Dualform ständig für die gesamte Lebensdauer der Rechenmaschine gespeichert. Durch Aufruf von einer Zifferntaste her wird die zugehörige Umrechnungszahl in den Verteiler eingegeben und der Verteilerinhalt anschließend dual mit 10 multipliziert. Nach 10maliger Wiederholung dieses Vorganges ist der Aufbau der gewünschten Dualzahl beendet. Zur Durchführung der Dualmultiplikation mit 10 enthält der Verteiler eine einfache Zusatzeinrichtung, um entsprechend des Dualbildes von 10 (d. i.  $L0 L0$ ) den Verteilerinhalt mit  $2^1$  bzw.  $2^3$  zu multiplizieren (das geschieht durch eine Verschiebung der Zahl um 1 bzw. 3 Stellen), und ein Addiergerät, um die beiden auf diese Weise gebildeten Partialprodukte zu addieren (Bild 2). Das Vorzeichensymbol wird nach der letzten Ziffer der Zahl eingegeben und löst einen Mechanismus aus, der einerseits zum Anhängen nicht bedeutsamer Nullen evtl. noch ausstehende Zehnermultiplikationen ausführt und andererseits bei negativem Vorzeichen einen zusätzlichen Impuls in die Vorzeichenstelle des Verteilers eingibt.

Bei der A u s g a b e erfolgt die Rückumwandlung in eine Dezimalzahl ebenfalls im Verteiler und zwar auf die übliche Weise durch Übertragung der unmittelbar vor dem Komma stehenden aus 4 Dualziffern bestehenden Gruppe in die entsprechende Dezimalziffer, darauf folgende Löschung der vor dem Komma stehenden Dualziffern und anschließende Multiplikation der restlichen Dualzahl mit 10. Die ausgegebenen Dezimalziffern können gedruckt oder auch zusätzlich in ein Band gelocht werden. Es ist Vorsorge getroffen, daß das Vorzeichensymbol am Ende der Zahl ausgeschrieben wird, so daß die Darstellung der Dezimalzahlen bei Ein- und Ausgabe identisch ist. Das angewendete Ausgabeverfahren arbeitet nur richtig, wenn die erste ausgegebene Ziffer die unmittelbar vor dem Komma stehende Dezimale darstellt. Dies ist der wesentliche Grund, weshalb der Rechenbereich der Maschine auf das Gebiet  $|Z| < 8$  eingeschränkt wurde.

### Abrundung

Nach einer Multiplikation ist das Produkt im Akkumulator auf 58 gültige Dualstellen hinter dem Komma errechnet. Vor Ausgabe in einen statischen Speicher muß eine Abrundung auf 29 Dualstellen hinter dem Komma stattfinden. Dieses wird bewirkt durch Addition einer 1 in die Position  $2^{-30}$  und nachträgliches Fortlassen des bei der Position  $2^{-30}$  beginnenden Restes der Zahl. Dieses Verfahren ist richtig, wenn der Erwartungswert des Restes  $1 \times 2^{-30}$  beträgt, was nach Multiplikation der Fall ist. Nach Anwendung des Halbierungsbefehles auf den Akkumulatorinhalt gilt jedoch obige Voraussetzung über den Erwartungswert des Restes nicht, falls der Akkumulator vor der Halbierung bereits eine auf 29 Stellen hinter dem Komma abgerundete Zahl enthielt. In diesem Fall weiß man, daß nach der Halbierung von Position  $2^{-31}$  beginnend der Rest lauter Nullen enthält. Man darf daher die Zahl jetzt nicht nach dem normalen Verfahren abrunden. Ein systematischer Abrundungsfehler wird in der Rechenmaschine auch in diesem Fall vermieden, indem die Maschine vor der Abrundung prüft, ob der Rest genau  $0,5 \times 2^{-29}$  beträgt. Ist dies der Fall, so wird zur Abrundung die Position  $2^{-29}$  unabhängig von ihrem vorherigen Wert zu einer 1 gemacht und der Rest fortgelassen. Dieses Verfahren bewirkt, daß der Rest von genau  $0,5 \times 2^{-29}$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach oben oder unten abgerundet wird. Auch nach mehrfacher Anwendung des Halbierungsbefehles vermeidet dieses erweiterte Abrundungsverfahren einen systematischen Fehler.

### Die Speichertrommel

Die Speichertrommel (Bild 3) besteht aus einem vollen Bondurzyylinder von  $L = 17$  cm Länge und  $D = 8,8$  cm Durchmesser und wird mittels direkter Kupplung mit der Welle eines 0,3 kW Drehstrommotores mit 50 U/sek um die eingezeichnete Achse gedreht. Die Trommelachse liegt horizontal. Da der Abstand zwischen der Trommeloberfläche und den Lesemagneten nur  $\frac{1}{20}$  mm beträgt, muß die Trommel sauber gearbeitet und ausgewuchtet sein. Die magnetisierbare Oberfläche ist hergestellt durch Aufspritzen einer zur Magnetophonbandherstellung entwickelten Magnetit-Dispersion ( $\gamma \text{Fe}_2\text{O}_3$ ), die von der Badischen Anilin- und Sodafabrik Ludwigshafen, unter der Typenbezeichnung LCH hergestellt wird. Unter allen von uns ausprobierten Dispersionen eignete sich diese Type besonders gut, da einerseits bei ihrer Verwendung die an den Leseköpfen anfallenden Leseimpulse besonders groß waren (0,2 V) und andererseits die Spannungsamplitude des durch die Körnigkeit der Dispersion hervorgerufenen unvermeidlichen Rauschpegels um den Faktor 100 unter der Höhe der Leseimpulse liegt. Die Dicke der



aufgebrachten Magnetitschicht beträgt etwa 0,03 mm. Auf der Trommel beträgt der tangentielle Abstand zwischen 2 benachbarten Ziffernpositionen, die sogenannte Ziffernbreite  $\frac{\pi \cdot D}{144} \approx 2 \text{ mm}$ , die Breite einer Spur einschließlich Sicherheitsabstand zwischen benachbarten Spuren 10 mm. Die Trommel rotiert in einem Eisenkäfig, der gleichzeitig zur Halterung der Magnetköpfe dient. Am linken Ende der Trommel befindet sich das Zahnrad für die Uhr. Es folgen die 3 Spuren für die dynamischen Register,  $Mr$  und  $Md$ , Akkumulator mit jeweils einem Schreib- und einem Lesemagneten. Die Repräsentation der Dualziffern 0 und 1 erfolgt in den Speichern durch tangentiales Magnetisieren senkrecht zur Achse bis zur Sättigung in der einen oder anderen Richtung (+Richtung oder —Richtung). In allen Verbindungsleitungen der Rechenmaschine

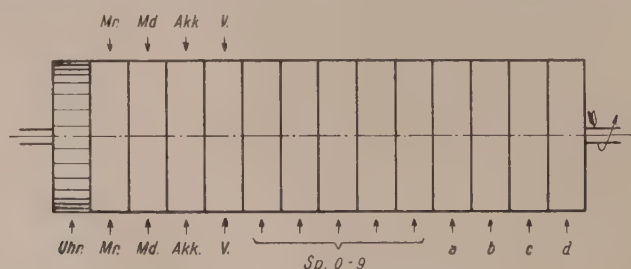


Bild 3. Die Magnettrommel

werden Einsen durch Impulse und Nullen durch Fehlen der Impulse dargestellt. Um in den dynamischen Speichern Einsen in Nullen umschreiben zu können, werden die 4 dynamischen Spuren durch dauernd eingeschaltete Löschmagnete nach Passieren der Leseköpfe in der Minusrichtung magnetisiert (das bedeutet Löschung des Inhaltes) und die Einsen hinterher von den Schreibköpfen neu eingeschrieben. Es folgen 5 weitere Spuren, die in den 1. und 3. Quadranten die festen Umrechnungszahlen  $1 \times 10^{-10}$  bis  $9 \times 10^{-10}$  und in den nullten und zweiten Quadranten die statischen Speicher 0 bis 9 enthalten. In den statischen Speichern erfolgt die magnetische Ziffernrepräsentation auf eine etwas andere Art dadurch, daß zur Darstellung der Ziffer 0 die erste Hälfte der Ziffernbreite in +Richtung und die zweite Hälfte in —Richtung magnetisiert wird. Bei der Ziffer 1 sind die Magnetisierungsrichtungen in beiden Hälften umgekehrt. Dieses Verfahren bietet den Vorteil, daß auf eine vollständige Löschung des Speicherinhaltes vor dem Einschreiben einer neuen Zahl verzichtet werden kann, da Einsen über Nullen und Nullen über Einsen unmittelbar überschrieben werden können. Ein zusätzlicher Löschmagnet ist hier nicht notwendig. Stattdessen benötigt man ein einfaches elektronisches Gerät, welches die einlaufende Impulsdarstellung der Zahl in eine elektrische Welle umwandelt, die zur Darstellung von Nullen in der ersten Ziffernhälfte positive und in der zweiten Ziffernhälfte negative Spannungen hat. Die entgegengesetzte Wellendarstellung wird zur Darstellung der Einsen gebildet. Die beim Ablesen vom Speicher notwendige Rückwandlung in einen Impulszug ist bei beiden Arten magnetischer Ziffernrepräsentation gleich einfach.

Die letzten 4 Spuren ganz rechts auf der Trommel nehmen die 4 zyklischen Gruppen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  zu je 4 statischen Speichern auf. Die Ziffernrepräsentation ist die gleiche wie bei den übrigen statischen Speichern.

Die Schreibköpfe, welche bei den statischen Speichern auch zum Lesen verwendet werden, ähneln den vom Magnetophon her bekannten Schreibmagneten. Sie erhalten einen lamellierten ringförmigen Eisenkern, der an der der Trommel zugewandten Seite einen 0,05 mm breiten Schlitz hat. Die dem Kern umgebende Magnetspule hat 250 Windungen. Die Eingangsimpedanz der Köpfe beträgt etwa 100 Ohm. Aus Abschirmungsgründen ist jeder Magnetkopf in einem Kasten aus 1 mm starkem Kupferblech eingebaut, aus welchem vorne mit dem Kasten abschließend die beiden Magnetpole heraussehen.

### Zuverlässigkeit

Bei der großen Anzahl von Schaltelementen werden sich Ausfälle der Maschine nicht ganz vermeiden lassen. Soweit diese Ausfälle durch allmähliche Alterung von Widerständen oder Röhren auftreten, kann man diese gealterten Elemente vor dem Ausfall auffinden. Dies geschieht anlässlich von in regelmäßigen Zeitabständen durchgeführten Prüfungen, bei denen die beiden Hauptbetriebsspannungen der Maschine von +280 V und —180 V um  $\pm 20\%$  geändert werden. Bei intakten Schaltelementen bleibt die Maschine rechenfähig, während Alterung von Elementen sich durch eine Verringerung des Änderungsbereiches bemerkbar macht. Die Wartung der Maschine ist relativ einfach. Da auf kompakte Bauweise verzichtet wurde, sind

sämtliche Schaltelemente zur Behebung von Störungen leicht zugänglich. Durch einen mit der Maschine vertrauten Techniker lassen sich Störungen im allgemeinen recht schnell beheben.

Nachtrag während der Korrektur:

Die Maschine ist im Sommer 1952 fertiggestellt und hat während der ersten Monate ihrer Erprobung so zufriedenstellend gearbeitet, daß sie zur praktischen Arbeitsaufnahme im September 1952 ihren endgültigen Aufstellungsort im Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, einnehmen konnte.

### Rechenbeispiele

Zur Illustration der Anwendung der Rechenbefehle geben wir nun noch zwei Beispiele.

1.) Es soll der Ausdruck

$$[(a - 0,3 \cdot 4,5) b] : 0,2 = c$$

berechnet werden. Die Zahl  $a$  sei bereits im Speicher 3, die Zahl  $b$  im Speicher  $c2$ , während das Ergebnis  $c$  auf den Speicherplatz 4 gebracht werden soll. Hierfür schreiben wir kurz:

$$a = \langle 3 \rangle; \quad b = \langle c2 \rangle; \quad c \rightarrow 4.$$

Die Befehlsfolge, die entweder ins Lochband einzulochen, oder von Hand aus durch Anschlag der entsprechenden Tasten der Schreibmaschine zu geben wäre, lautet dann (mit den von der Maschine von allein geschriebenen Zwischenräumen)

$$+3 \ 03p \ m \ 45p \ \times ] \times c2 \ 02p : \rightarrow 4.$$

Das sind 20 Tastenanschläge bzw. Lochreihen. Die Maschine benötigt hierzu etwa 4 sec.

2.) Es soll die lineare Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y); \quad f(x, y) = p(x) \cdot y + q(x)$$

schrittweise mit der Schrittweite  $h$  integriert werden. Hierzu benutzt man zweckmäßig folgendes Verfahren, das wir als das der „direkten Interpolation“ bezeichnen wollen. Führt man für alle Punkte (d. h. für die Stellen  $x = x_v$ , wobei  $x_{v+1} = x_v + h$ ) die Bezeichnungen

$$\bar{p}_v = \frac{h^2}{12} p(x_v); \quad \bar{q}_v = \frac{h^2}{12} q(x_v); \quad \bar{f}_v = \bar{p}_v \cdot y_v + q_v \approx \frac{h^2}{12} f(x_v, y(x_v))$$

ein, wobei  $y_v$  die berechnete Näherung für  $y$  an der Stelle  $x_v$  sei, so folgt nach diesem Verfahren der Wert von  $y$  an der Stelle  $v = n + 1$  aus den zuvor berechneten ( $v = n$  und  $v = n - 1$ ) nach der Formel

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - \bar{p}_{n+1}} [2 y_n - y_{n-1} + \bar{q}_{n+1} + 10 \bar{f}_n + \bar{f}_{n-1}]$$

$$\bar{f}_{n+1} = \bar{p}_{n+1} \cdot y_{n+1} + \bar{q}_{n+1}.$$

Der pro Schritt erzeugte Fehler ist hierbei von der Ordnung

$$\frac{1}{240} h^6 \frac{d^6 y}{dx^6}.$$

Die Folge der  $\bar{p}_v$  stehe auf Band  $b$ ; die Folge der  $\bar{q}_v$  auf Band  $c$ . Die Besetzung der Speicher nach dem  $n$ ten Schritt sei

$$\bar{f}_n = \langle a0 \rangle \quad y_n = \langle b0 \rangle \quad 0,1 = \langle 0 \rangle$$

$$\bar{f}_{n-1} = \langle a1 \rangle \quad y_{n-1} = \langle b1 \rangle.$$

Die dynamischen Register seien leer. Die Verschlüsselung eines Integrationsschrittes, der zu einem entsprechenden Zustand der Speicher mit  $(n + 1)$  an der Stelle von  $n$  führt, sieht dann so aus: (In der zweiten Spalte ist der Inhalt des Accumulators nach Durchführung der jeweiligen Befehlsgruppe angegeben):

Befehlsgruppe	Inhalt des Acc	Bemerkungen
1. $1p+$	1	Die Zahl 1 wird in den Acc. addiert.
2. $Bb$	1	Die Zahl auf Band $b$ , die an der Reihe ist (hier $\bar{p}_{n+1}$ ) wird in den Verteiler geschafft. Nach Ablesen des Vorzeichens von $\bar{p}_{n+1}$ kehrt der Rechengang zum Band $a$ zurück.



Befehlsgruppe	Inhalt des Acc	Bemerkungen
3. $\rightarrow 1$	1	$\bar{p}_{n+1}$ wird in den Speicher 1 gebracht und dort zur späteren Bildung von $\bar{f}_{n+1}$ aufgehoben (s. 21.)
4. $-1$	$1 - \bar{p}_{n+1}$	
5. $\rightarrow 2$	0	$1 - \bar{p}_{n+1}$ wird in den Speicher 2 gebracht. Der Acc wird dabei automatisch gelöscht. (Vgl. 2.)
6. $+ a0$	$-\bar{f}_n$	
7. $: 0$	$\bar{f}_n : 0,1$	Division durch 0,1, da eine einfache Multiplikation mit 10 ( $> 8!$ ) nicht möglich ist.
8. $+ a1$	$10\bar{f}_n + \bar{f}_{n-1}$	
9. $Bc$	„	$\bar{q}_{n+1}$ wird abgelesen und in den Verteiler gebracht.
10. $\rightarrow 3$	„	$\bar{q}_{n+1}$ wird im Speicher 3 zur späteren Bildung von $\bar{f}_{n+1}$ aufgehoben (s. 20)
11. $+ 3$	$10\bar{f}_n + \bar{f}_{n-1} + \bar{q}_{n+1}$	
12. $- b1$	„ $- y_{n-1}$	
13. $+ b0$	„ $+ y_n$	
14. $+ b0$	„ $+ 2y_n$	Die Bildung der eckigen Klammer ist damit abgeschlossen.
15. $: 2$	$y_{n+1}$	5.)!. Damit ist das neue $y$ berechnet. Die folgenden Befehle dienen nur der Ausgabe dieses Ergebnisses und der Neuordnung der Speicherinhalte, damit der nächste Integrations-schritt nach demselben Schema durchgeführt werden kann.
16. $b$	$y_{n+1}$	Zyklische Vertauschung der Speicher der Gruppe $b$ , um $y_{n+1}$ auf den Platz $b0$ zu bringen.
17. $\rightarrow b0$	0	
18. $L b0$	0	$y_{n+1}$ wird von der Schreibmaschine geschrieben und in das Ergebnisband gebracht.
19. $a$	0	Zyklische Vertauschung analog 16.
20. $+ 3$	$\bar{q}_{n+1}$	
21. $m b0 \left\{ \begin{array}{l} \\ \times 1 \end{array} \right\}$	$\bar{q}_{n+1} + (\bar{p}_{n+1} \cdot y_{n+1})$ $= \bar{f}_{n+1}$	
22. $\rightarrow a0$	0	Damit ist der Zyklus geschlossen.

Insgesamt sind dies 54 Einzelbefehle, bzw. Lochreihen im Befehlsband  $a$  ( $\approx 11$  cm Bandlänge). Einschließlich der Ablesung der Bänder  $b$  und  $c$  und der Ausgabe benötigt die Maschine etwa 12 sec für einen solchen Integrations-schritt, für 50 Schritte also etwa 10 min.

Als Beispiel wurde nach diesem Schema die Differentialgleichung  $y'' + y/4x^2 = 0$  mit der Maschine integriert, deren Lösung zu den gewählten Anfangsbedingungen ( $y = \sqrt{x}$ ) bekannt ist.

Unsere Erfahrungen bei der Verschlüsselung einer großen Zahl verschiedener Probleme haben gezeigt, daß es möglich ist, in wenigen Tagen oder Wochen die Aufstellung der Befehlspläne für Probleme zu erlernen, wenn diese in einer Form vorliegen, daß sie direkt mit den üblichen Methoden der numerischen Analysis bearbeitet werden können. Es entfällt hier ja die wesentliche Komplikation für die Befehlsgebung, die bei einer programmgesteuerten Maschine bei der Aneinanderfügung verschiedener Befehlszyklen und allen mehr „logischen“ Operationen entstehen.

Eingegangen am 29. März 1952.

## KLEINE MITTEILUNGEN

### Zur Approximation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe ihrer niederen Momente.

Um eine Funktion unter Verwendung ihrer niederen Momente zu approximieren, bedient man sich zweckmäßigerweise eines Systems von Näherungsfunktionen, die bereits irgendeine Ähnlichkeit mit der zu approximierenden Funktion besitzen. Bei Annäherung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung wird man z. B. daran denken, die Gaußverteilung in die Approximationsmethode einzubauen, d. h. die Hermiteschen Polynome zu verwenden. Im Folgenden soll kurz gezeigt werden, daß man neben Forderungen über die Werte der niederen Momente auch noch andere Forderungen erfüllen kann. Man kann zusätzlich Forderungen über einzelne Funktionswerte erfüllen, und man kann außerdem erreichen, daß sich die gewünschte Näherungsfunktion in vorgegebenen Teilbereichen möglichst wenig von Null unterscheidet.

Erfüllung von Forderungen über die Werte der ersten  $m$  Momente. Es sei vorerst an einige aus dem Schrifttum bekannte Dinge erinnert. Eine Funktion  $w(x)$ , die in einem Intervall  $x_1 \dots x_2$  die Momente  $M_0, M_1, M_2, \dots$  haben möge, soll in dem betreffenden Intervall durch die Näherungsfunktion

$$W(x) \equiv \alpha_0 H(x) W_0(x) + \alpha_1 H(x) W_1(x) + \alpha_2 H(x) W_2(x) + \dots \quad (1)$$

dermaßen angenähert werden, daß

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} W(x) dx &= M_0, & \int_{x_1}^{x_2} x W(x) dx &= M_1, \\ \int_{x_1}^{x_2} x^2 W(x) dx &= M_2, \dots \end{aligned}$$

Dabei sind die  $\alpha_i$  zunächst unbestimmte Koeffizienten, ferner ist  $H(x)$  eine willkürlich wählbare Funktion, die zweckmäßigerweise irgendwelche Ähnlichkeiten mit der zu approximierenden Funktion hat, und außerdem sind die Funktionen  $W_i(x)$  Polynome, die so eingerichtet werden, daß die Berechnung der Koeffizienten  $\alpha_i$  recht einfach vor sich geht.

Analog der Herleitung der Legendreschen Polynome setzt man an:

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= 1, \\ W_1 &= x + a, \\ W_2 &= x^2 + b_1 x + b_2, \\ W_3 &= x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

und bestimmt die Größen  $a, b_i, c_i, \dots$  derart, daß

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x) W_m(x) W_n(x) dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n.$$

Dies wird erreicht, wenn man  $a, b_i, c_i, \dots$  so bestimmt, daß

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x) x W_n(x) dx = 0 \quad \text{für} \quad m < n.$$

Man gelangt, wenn die Momente von  $H(x)$  mit  $p_0, p_1, p_2, \dots$  bezeichnet werden, damit zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p_1 + a p_0 &= 0, \\ p_2 + b_1 p_1 + b_2 p_0 &= 0, \\ p_3 + b_1 p_2 + b_2 p_1 &= 0, \\ p_3 + c_1 p_2 + c_2 p_1 + c_3 p_0 &= 0, \\ p_4 + c_1 p_3 + c_2 p_2 + c_3 p_1 &= 0, \\ p_5 + c_1 p_4 + c_2 p_3 + c_3 p_2 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Mit  $p_0 \neq 0, \frac{p_1 p_0}{p_2 p_1} \neq 0$  und dem Nicht-Verschwinden der übrigen in Frage kommenden Determinanten sind die Größen  $a, b_i, c_i, \dots$  bestimmbar.

Unter Benutzung der Polynome  $W_i(x)$  kommt man zu dem gewünschten Gleichungssystem, aus dem die Größen  $\alpha_i$  bequem erhältlich sind. Multipliziert man nämlich

$$W \equiv \alpha_0 H W_0 + \alpha_1 H W_1 + \alpha_2 H W_2 + \dots$$

mit  $W_0$  bzw.  $W_1$  bzw.  $W_2$  usw. und integriert von  $x_1$  bis  $x_2$ , dann entsteht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_0 \int_{x_1}^{x_2} H W_0^2 dx + \alpha_1 \int_{x_1}^{x_2} H W_1 W_0 dx + \alpha_2 \int_{x_1}^{x_2} H W_2 W_0 dx + \dots &= M_0, \\ \alpha_0 \int_{x_1}^{x_2} H W_0 W_1 dx + \alpha_1 \int_{x_1}^{x_2} H W_1^2 dx + \alpha_2 \int_{x_1}^{x_2} H W_2 W_1 dx + \dots &= M_1 + a M_0, \\ \alpha_0 \int_{x_1}^{x_2} H W_0 W_2 dx + \alpha_1 \int_{x_1}^{x_2} H W_1 W_2 dx + \alpha_2 \int_{x_1}^{x_2} H W_2^2 dx + \dots &= M_2 + b_1 M_1 + b_2 M_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

in dem alle Integrale  $\int_{x_1}^{x_2} H W_m W_n dx$  für  $m \neq n$  verschwinden. Die  $\alpha_i$  ergeben sich einfach zu

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{M_0}{\int_{x_1}^{x_2} H W_0^2 dx}, & \alpha_1 &= \frac{M_1 + a M_0}{\int_{x_1}^{x_2} H W_1^2 dx}, \\ \alpha_2 &= \frac{M_2 + b_1 M_1 + b_2 M_0}{\int_{x_1}^{x_2} H W_2^2 dx}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

Wie bei Verwendung der Legendreschen Polynome berechnen sich die Koeffizienten unabhängig voneinander. Aus der Näherungsfunktion, die sich unter Zugrundelegung der ersten  $m$  Momente ergibt, gewinnt man die Näherungsfunktion, die sich unter Zugrundelegung der ersten  $m+1$  Momente ergibt, durch Addieren eines dem  $(m+1)$ -ten Moment entsprechenden Gliedes. Die den ersten  $m$  Momenten entsprechenden Glieder bleiben hierbei unbeeinflusst.

Forderungen über einzelne Funktionswerte. Hat man eine Näherungsfunktion  $W$  unter Zugrundelegung der ersten  $m$  Momente gefunden und wünscht man, daß die Näherungsfunktion nicht nur diese  $m$  Momente aufweist, sondern auch durch den Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  geht, so braucht man nur das  $(m+1)$ -te Moment als eine vorerst unbestimmte Konstante aufzufassen und diese Konstante dann derart zu bestimmen, daß die Näherungsfunktion an der Stelle  $\bar{x}$  den Wert  $\bar{y}$  hat. Das ist gleichbedeutend damit, daß man  $\alpha_{m+1}$  so bestimmt, daß die Näherungsfunktion durch den Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  geht. Wie man leicht einsieht, wird diese Forderung erfüllt, wenn

$$\alpha_{m+1} = \frac{\bar{y} - \bar{W}}{H W_{m+1}} \dots \quad (4a).$$

Mit einem Querstrich über einer Größe ist angedeutet, daß die betreffende Größe an der Stelle  $\bar{x}$  zu nehmen ist. Man sieht, daß als Näherungsfunktion hier also auch Formel (1) mit den durch (2) gegebenen Polynomen  $W_i$  zu verwenden ist, wobei aber nur die Koeffizienten  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  mit Hilfe von (3) zu berechnen sind, während  $\alpha_{m+1}$  nach (4a) zu berechnen ist. Wir schreiben den zu benutzenden Näherungsausdruck  $V$  folgendermaßen:

$$V = W + \frac{\bar{y} - W}{H W_{m+1}} H W_{m+1} \dots \quad (4b),$$



wobei  $W$  den durch (1), (2) und (3) gegebenen Näherungsausdruck bedeutet, für den nur die Werte der ersten  $m$  Momente vorgeschrieben sind.

Neben dem soeben behandelten Fall betrachten wir auch die Möglichkeit, daß die Näherungsfunktion  $V$ , die unter Zugrundelegung der ersten  $m$  Momente gefunden ist und durch den Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  geht, außerdem auch noch durch einen Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  geht. Bei entsprechender Behandlung dieser Aufgabe fassen wir nunmehr auch das  $(m+2)$ -te Moment und hiermit  $\alpha_{m+2}$  als zunächst unbestimmte Konstante auf und bestimmen  $\alpha_{m+2}$  derart, daß die gestellten Forderungen erfüllt werden. Es ist unschwer zu erkennen, daß man das Gewünschte erreicht, wenn man zur Näherungsfunktion (4b) ein weiteres Glied addiert und somit den folgenden Näherungsausdruck benutzt:

$$V = W + \frac{\bar{y} - \bar{W}}{H \bar{W}_{m+1}} H W_{m+1} + \frac{(\bar{y} - \bar{W}) \bar{H} \bar{W}_{m+1} - (\bar{y} - \bar{W}) \bar{H} \bar{W}_{m+1}}{H \bar{W}_{m+1} \bar{H} (\bar{W}_{m+1} \bar{W}_{m+2} - \bar{W}_{m+1} \bar{W}_{m+2})} \cdot H (W_{m+1} W_{m+2} - \bar{W}_{m+2} W_{m+1}) \quad (5).$$

Mit einem bzw. zwei Querstrichen über einer Größe ist angedeutet, daß die betreffende Größe an der Stelle  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{x}$  zu nehmen ist.

Für den Fall, daß die Näherungsfunktion außer den vorstehend erfüllten Forderungen auch noch durch einen Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  oder noch weitere Punkte gehen soll, wären entsprechende Formeln abzuleiten. Im allgemeinen ist dies jedoch für die praktisch auftretenden Bedürfnisse nicht von Bedeutung.

Forderungen über bestmögliches Verschwinden der Näherungsfunktion in einem Teilbereich. Praktisch recht belangreich ist die Frage, auf welche Weise man eine zusätzliche Forderung über bestmögliches Verschwinden der Näherungsfunktion in einem vorgegebenen Teilbereich, der auch mehrteilig sein darf, zuwege bringen kann. Eine solche Fragestellung taucht auf, sobald man für  $H(x)$  irgendeine sich über einen unendlichen Bereich erstreckende Funktion wählt, währenddessen die zu approximierende Wahrscheinlichkeitsverteilung nur in einem endlichen Bereich von Argumentwerten existiert.

Wir nehmen uns zunächst den Fall vor, daß die Werte der ersten  $m$  Momente vorgegeben seien und daneben gefordert wird, daß sich die Näherungsfunktion in einem Bereich  $x_3 \dots x_4$  möglichst wenig von Null unterscheidet, wobei „möglichst wenig unterscheiden“ im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate verstanden sein möge. Das Gewünschte wird hier offensichtlich erreicht, sofern wir unter Zugrundelegung der ersten  $m$  Momente vorerst eine Näherungsfunktion  $W$  gemäß (1), (2) und (3) ausfindig machen und dann weitere Glieder gemäß Formel (1) addieren, in denen zwar die durch (2) gegebenen Polynome  $W_{m+1}$ ,  $W_{m+2}$ ,  $W_{m+3}$ , ... verwendet werden, aber die Koeffizienten  $\alpha_{m+1}$ ,  $\alpha_{m+2}$ ,  $\alpha_{m+3}$ , ... derart bestimmt werden, daß

$$\int_{x_3}^{x_4} (W + \alpha_{m+1} H W_{m+1} + \alpha_{m+2} H W_{m+2} + \dots)^2 dx = \text{Min.}$$

Die Koeffizienten  $\alpha_{m+1}$ ,  $\alpha_{m+2}$ ,  $\alpha_{m+3}$ , ... sind aus nachstehendem Gleichungssystem erhältlich:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{m+1} \int_{x_3}^{x_4} H^2 W_{m+1}^2 dx \\ + \alpha_{m+2} \int_{x_3}^{x_4} H^2 W_{m+1} W_{m+2} dx + \dots = \\ - \int_{x_3}^{x_4} W H W_{m+1} dx, \\ \alpha_{m+1} \int_{x_3}^{x_4} H^2 W_{m+1} W_{m+2} dx \\ + \alpha_{m+2} \int_{x_3}^{x_4} H^2 W_{m+2}^2 dx + \dots = \\ - \int_{x_3}^{x_4} W H W_{m+2} dx \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (6a).$$

Die gesuchte Näherungsfunktion läßt sich schreiben:

$$U = W + \alpha_{m+1} H W_{m+1} + \alpha_{m+2} H W_{m+2} + \dots \quad (6b),$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_{m+1}$ ,  $\alpha_{m+2}$ , ... durch (6a) bestimmt sind.

Als nächsten Fall fassen wir die Möglichkeit ins Auge, daß die Werte der ersten  $m$  Momente gegeben sind, daß ferner die Näherungsfunktion durch einen Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  gehen soll und daß sich die Näherungsfunktion außerdem in einem Bereich  $x_3 \dots x_4$  möglichst wenig von Null unterscheiden möge. Um in diesem Fall eine Lösung zu finden, sehen wir uns Formel (4b) nochmals an und überlegen uns, daß wir auch noch zahllose andere Formeln bilden könnten, die das gleiche wie Formel (4b) leisten. Durch lineare Kombination solcher Ausdrücke vermögen wir leicht eine Formel zu bilden, die einerseits dasselbe wie Formel (4b) leistet und andererseits beliebig viele unbestimmte Konstante linear enthält. Eine so beschaffene Formel ist

$$U = W + \sum_{i=1} \beta_i B_i \quad (7a),$$

mit  $B_i = \frac{\bar{y} - \bar{W}}{H \bar{W}_{m+i}} H W_{m+i}$  und  $\sum_i \beta_i = 1$

Über die  $\beta_i$  verfügen wir nun derart, daß wir fordern, es möge  $\int_{x_3}^{x_4} U^2 dx = \text{Min.}$  sein, und gelangen zu dem folgenden Gleichungssystem, aus dem die  $\beta_i$  berechenbar sind:

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 \int_{x_3}^{x_4} (B_2 - B_1)^2 dx \\ + \beta_3 \int_{x_3}^{x_4} (B_2 - B_1) (B_3 - B_1) dx + \dots = \\ - \int_{x_3}^{x_4} (W + B_1) (B_2 - B_1) dx, \\ \beta_2 \int_{x_3}^{x_4} (B_2 - B_1) (B_3 - B_1) dx \\ + \beta_3 \int_{x_3}^{x_4} (B_3 - B_1)^2 dx + \dots = \\ - \int_{x_3}^{x_4} (W + B_1) (B_3 - B_1) dx \\ \dots \dots \dots \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots = 1 \end{aligned} \right\} \quad (7b).$$

Da alle  $B_i$  hier den Faktor  $\frac{\bar{y} - \bar{W}}{H}$  enthalten, lassen sich in den vorstehenden Gleichungen entsprechende Kürzungen durch diesen Faktor vornehmen.

Als weiteren Fall betrachten wir schließlich die Möglichkeit, daß die Werte der ersten  $m$  Momente vorgegeben sind, daß ferner die Näherungsfunktion durch die Punkte  $(\bar{x}, \bar{y})$  und  $(\bar{x}, \bar{y})$  gehen soll und daß sich die Näherungsfunktion außerdem in einem Bereich  $x_3 \dots x_4$  möglichst wenig von Null unterscheiden möge. Um hier eine entsprechende Lösung wie im vorstehenden Fall abzuleiten, ziehen wir Formel (5) heran und erkennen leicht, daß die folgende Formel dasselbe wie (5) leistet und dabei beliebig viele Konstante enthält:

$$U = W + \beta_i \cdot B_{2i-1} \dots \dots \dots (8a)$$

mit

$$B_i = \frac{\bar{y} - \bar{W}}{H \bar{W}_{m+i}} H W_{m+i} + \frac{(\bar{y} - \bar{W}) \bar{H} \bar{W}_{m+i} - (\bar{y} - \bar{W}) \bar{H} \bar{W}_{m+i}}{H \bar{W}_{m+i} \bar{H} (\bar{W}_{m+i} \bar{H}_{m+i+1} - \bar{W}_{m+i} \bar{W}_{m+i+1})} \cdot \bar{H} (\bar{W}_{m+i} W_{m+i+1} - W_{m+i} \bar{W}_{m+i+1})$$

und

$$\sum_i \beta_i = 1.$$

Wir bestimmen die  $\beta_i$  wieder derart, daß  $\int_{x_3}^{x_4} U^2 dx = \text{Min.}$  und gelangen zu dem folgenden Gleichungssystem, aus dem die  $\beta_i$  berechenbar sind:

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 f(B_3 - B_1)^2 dx \\ + \beta_3 f(B_3 - B_1)(B_5 - B_1) dx + \dots = \\ - f(W + B_1)(B_3 - B_1) dx, \\ \beta_2 f(B_3 - B_1)(B_5 - B_1) dx \\ + \beta_3 f(B_5 - B_1)^2 dx + \dots = \\ - f(W + B_1)(B_5 - B_1) dx \\ \dots \dots \dots \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots = 1 \end{aligned} \right\} (8b).$$

**Hinweis.** Zum Schluß sei auf ein System von Funktionssystemen hingewiesen, dessen Verwendung bei Approximation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen bisweilen nützlich ist.

Wählen wir  $H(x) = x^\lambda e^{-x}$  mit  $x_1 = 0$  und  $x_2 = \infty$ , so vermögen wir für jedes positive ganzzahlige  $\lambda$  (sowie  $\lambda = 0$ ) die Polynome  $W_k(x)$  der Formel (1) allgemein anzugeben mit

$$\begin{aligned} W_k = x^k - (k + \lambda) \binom{k}{1} x^{k-1} \\ + (k + \lambda)(k + \lambda - 1) \binom{k}{2} x^{k-2} \\ - (k + \lambda)(k + \lambda - 1)(k + \lambda - 2) \binom{k}{3} x^{k-3} \pm \dots \\ + (-1)^k (k + \lambda)!, \end{aligned}$$

wobei  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Bei der Bildung der zugehörigen Koeffizienten  $\alpha_k$  beachten wir, daß hier

$$\int_0^\infty H W_k^2 dx = k! \cdot (k + \lambda)!$$

Für  $\lambda = 1$  z. B. sieht die Reihe der ersten Näherungsglieder folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} W(x) = x e^{-x} \left[ \frac{M_0}{0! 1!} + \frac{M_1 - 2 M_0}{1! 2!} (x - 2) \right. \\ \left. + \frac{M_2 - 6 M_1 + 6 M_0}{2! 3!} (x^2 - 6x + 6) + \dots \right], \end{aligned}$$

wobei die Momente  $M_k$  selbstverständlich auf den Nullpunkt der  $x$ -Skala bezogen sind.

Durch geeignete Wahl von  $\lambda$  können wir bereits der Funktion  $H(x)$  irgendeine Ähnlichkeit mit der zu approximierenden Funktion aufprägen, indem wir ein erstes Hauptcharakteristikum berücksichtigen. Für  $H(x) = x^\lambda e^{-x}$  gilt im Bereich  $0 \dots \infty$ , daß das auf den Erwartungswert bezogene Streuungsquadrat

$$\sigma^2 = \lambda + 1, \text{ die Schiefe } = \frac{\lambda + 2}{\sqrt{\lambda + 1}} \text{ und der Exzeß}$$

$= 3 \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}$ . Schiefe und Exzeß streben bei unbegrenzt wachsendem  $\lambda$  gegen die entsprechenden Werte der Gaußverteilung.

Göttingen. Otfried M. J. Mittmann.

## Numerische Integration impliziter Differentialgleichungen

Implizite Differentialgleichungen treten in den Anwendungen nur verhältnismäßig selten auf und sind daher in der praktischen Mathematik kaum betrachtet worden. So wird z. B. in dem umfassenden Werk von Collatz [1] lediglich in einer kurzen Bemerkung im Anhang ein Verfahren zur Lösung der Gleichung  $F(x, y, y') = 0$  angegeben, das überdies an gewisse einschränkende Voraussetzungen gebunden ist. Im folgenden werden zunächst einige rechnerische Vereinfachungen für das von Collatz vorgeschlagene Verfahren beschrieben und dann weitere Methoden angegeben, die von den erwähnten einschränkenden Voraussetzungen frei sind und i. a. auch weniger Rechenarbeit erfordern.

1. Nach dem Vorschlag von Collatz wird die implizite Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (F(x_0, y_0, y'_0) = 0) \quad (2)$$

durch die Substitution  $y' = t$  in das explizite System

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = t f(x, y, t) \quad (3)$$

mit

$$f(x, y, t) = - \frac{F_t}{F_x + t F_y} \quad (4)$$

übergeführt, wobei die Lösungsfunktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$  den Anfangsbedingungen

$$x(y'_0) = x_0, \quad y(y'_0) = y_0$$

genügen. Das Verfahren ist nur durchführbar, wenn für die (als zweimal differenzierbar angenommene) Lösung  $y(x)$  von (1), (2) gilt

$$y'' \neq 0, \quad F_x + y' F_y \neq 0.$$

Während man nun gewöhnlich zur Lösung eines Systems von zwei Differentialgleichungen nach einem der bekannten Differenzenverfahren zwei Differenzenschemata benötigt, kann man für das spezielle System (3) auch mit einem Schema auskommen. Das kann man auf verschiedene Weisen erreichen, z. B. folgendermaßen:

Setzt man zur Abkürzung  $f^* = t f$ , so gilt mit der Schrittweite  $h$

$$\nabla f_k^* = t_k \nabla f_k + i h \nabla^{i-1} f_{k-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

so daß man mit den üblichen Koeffizienten

$$a_i = \int_0^1 \frac{u(u+1) \dots (u+i-1)}{i!} du \quad (5)$$

für das Extrapolationsverfahren die Formeln

$$x_{k+1} - x_k = h \sum_{i=0}^r a_i \nabla^i f_k \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= h \sum_{i=0}^r a_i \nabla^i f_k^* \\ &= t_k (x_{k+1} - x_k) + h^2 \sum_{i=1}^r i a_i \nabla^{i-1} f_{k-1} \end{aligned} \quad (7)$$

bekommt. Analog erhält man für das Interpolationsverfahren mit den Koeffizienten

$$b_i = \int_{-1}^0 \frac{u(u+1) \dots (u+i-1)}{i!} du \quad (8)$$

das Gleichungssystem

$$x_{k+1} - x_k = h \sum_{i=0}^r b_i \nabla^i f_{k+1} \quad (9)$$

$$y_{k+1} - y_k = t_{k+1} (x_{k+1} - x_k) + h^2 \sum_{i=1}^r i b_i \nabla^{i-1} f_k \quad (10)$$

das normalerweise durch Iteration gelöst werden kann, wobei man zweckmäßig die Näherungswerte  $x_{k+1}^{(v+1)}$ ,  $y_{k+1}^{(v+1)}$  aus geschätzten Werten  $x_k^{(v)}$ ,  $y_k^{(v)}$  nach den Formeln

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{(v+1)} - x_{k+1}^{(v)} &= h a_r [f(x_{k+1}^{(v)}, y_{k+1}^{(v)}, t_{k+1}) \\ &\quad - f(x_{k+1}^{(v-1)}, y_{k+1}^{(v-1)}, t_{k+1})] \quad v = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

$$y_{k+1}^{(v+1)} - y_{k+1}^{(v)} = t_{k+1} [x_{k+1}^{(v+1)} - x_{k+1}^{(v)}], \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

berechnet.

2. Denkt man sich in (1) die Lösung  $y(x)$  eingesetzt und differenziert man nach  $x$ , so ergibt sich nach Division durch  $F_{y'}$  die mit (1) äquivalente Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = - \frac{F_x + y' F_y}{F_{y'}} \quad (13)$$



mit der Anfangsbedingung (2). Die hierfür notwendige Voraussetzung  $F_{y'} \neq 0$  muß man sowieso machen, damit (1) eine eindeutige Lösung besitzt. Allgemeiner kann man auf diese Weise die implizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (14)$$

in die explizite Gleichung  $(n+1)$ -ter Ordnung

$$y^{(n+1)} = - \frac{F_y + y' F_{y'} + y'' F_{y''} + \dots + y^{(n)} F_{y^{(n)}}}{F_{y^{(n+1)}}} \quad (15)$$

verwandeln, die nach jedem der bekannten Verfahren für Differentialgleichungen höherer Ordnung (vgl. [1]) gelöst werden kann. Noch allgemeiner kann man durch Differenzieren nach  $x$  ein beliebiges implizites System von Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung überführen in ein explizites System von ebensoviel Gleichungen  $(n+1)$ -ter Ordnung; man muß dabei nur voraussetzen, daß in den differenzierten Gleichungen die Koeffizienten der  $(n+1)$ -ten Ableitungen eine nicht singuläre Matrix bilden, so daß man nach diesen Ableitungen auflösen kann.

3. Man kann die Gleichung (1) aber auch integrieren, ohne sie überhaupt explizit zu machen. So wird in [2] gezeigt: Setzt man

$$f(x, y, y') = y' - \frac{F(x, y, y')}{F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)} \quad (16)$$

und bildet — ausgehend von einer weithin willkürlichen Funktion  $y'_0(x)$  — die beiden Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} y_\nu(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x y'_\nu(x) dx, \\ y'_{\nu+1}(x) &= f(x, y_\nu(x), y'_\nu(x)), \\ \nu &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

so konvergiert die Folge  $y_\nu(x)$  unter sehr allgemeinen, in der Praxis wohl stets erfüllten Voraussetzungen gegen die Lösung  $y(x)$  von (1), (2). Diese Methode ist eine Kombination des Verfahrens von Newton zur Berechnung von Nullstellen und des Verfahrens von Picard-Lindelöf zur Lösung expliziter Differentialgleichungen und läßt sich genau wie dieses („Verfahren der wiederholten Quadratur“) numerisch verwirklichen, wenn man die in (17) auftretenden Integrale mittels numerischer Quadraturformeln berechnet. Hinsichtlich der Rechenökonomie ist diese Methode allerdings denselben Einwänden ausgesetzt wie das Verfahren der wiederholten Quadratur. Numerisch zweckmäßiger ist es, das Newtonsche Nullstellenverfahren mit einem der Differenzenverfahren für Differentialgleichungen zu kombinieren:

Hat man sich durch eine Anlaufrechnung (etwa nach 2.) gewisse Anfangswerte  $y_k = y(x_k)$ ,  $y'_k = y'(x_k)$  beschafft, so berechnet man  $y_{k+1}$  mittels der Koeffizienten (5) aus

$$y_{k+1} - y_k = h \sum_{i=0}^r a_i \nabla^i y'_k \quad (18)$$

und  $y'_{k+1}$  — etwa mittels des Newtonschen Verfahrens — als Nullstelle der Gleichung

$$F(x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}) = 0 \quad (19)$$

Während diese Methode offenbar dem Extrapolationsverfahren entspricht, führt die Übertragung des Interpolationsverfahrens auf das Gleichungssystem

$$y_{k+1} - y_k = h \sum_{i=0}^r b_i \nabla^i y'_{k+1}, \quad b_i \text{ wie in (8)} \quad (20)$$

$$F(x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}) = 0 \quad (21)$$

Um daraus  $y_{k+1}$ ,  $y'_{k+1}$  zu berechnen, beschafft man sich am besten durch Schätzung von  $\nabla^r y_{k+1}$  und anschließende Ergänzung des Differenzenschemas Nähe-

rungswerte  $\nabla^i y'_{k+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) und daraus durch Einsetzen in (20) eine Näherung  $y'_{k+1}$ . Durch Berechnung der Nullstelle von

$$F(x_{k+1}, y'_{k+1}, y'_{k+1}) = 0$$

erhält man  $y'_{k+1}$  und daraus  $y_{k+1}$  nach (20). So fortfahrend kann (20), (21) durch Iteration gelöst werden, wobei man in den weiteren Iterationsschritten (20) durch

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(\nu+1)} - y_{k+1}^{(\nu)} &= h a_r (y_{k+1}^{(\nu+1)} - y_{k+1}^{(\nu)}), \\ \nu &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

ersetzt. Auch wird es i. a. zweckmäßig sein, für  $y'_{k+1}$  nicht die genaue Nullstelle der Gleichung

$$F(x_{k+1}, y_{k+1}^{(\nu)}, y_{k+1}^{(\nu)}) = 0 \quad (23)$$

zu nehmen, sondern sich mit der ersten Newtonschen Verbesserung des Wertes  $y_{k+1}^{(\nu-1)}$  zu begnügen.

Zu einer Fehlerabschätzung kann man wie folgt gelangen. Bezeichnet man mit  $\bar{y}$  die exakte Lösung von (1), (2), mit  $y$  wie bisher die Näherung und setzt

$$\varepsilon_k = \bar{y}_k - y_k, \quad \varepsilon'_k = \bar{y}'_k - y'_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

so folgt aus den Gleichungen

$$0 = F(x_k, \bar{y}_k, \bar{y}'_k) = F(x_k, y_k, y'_k) \quad (24)$$

und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung die Beziehung

$$\varepsilon'_k = - \left( \frac{F_y}{F_{y'}} \right)_k^* \varepsilon_k, \quad (25)$$

wobei der Stern andeuten soll, daß als Argument ein Zwischenwert der Argumente in (24) zu nehmen ist. Schreibt man nun z. B. die Formel (20) des Interpolationsverfahrens mit

$$\beta_q = (-1)^q \sum_{i=q}^r \binom{i}{q} b_i$$

in der Form

$$y_{k+1} - y_k = h \sum_{q=0}^r \beta_q y'_{k+1-q},$$

und analog für die exakte Lösung

$$\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k = h \sum_{q=0}^r \beta_q \bar{y}'_{k+1-q} + q_k$$

mit dem „Quadraturfehler“  $q_k$ , so folgt durch Subtraktion

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = h \sum_{q=0}^r \beta_q \varepsilon'_{k+1-q} + q_k.$$

und wegen (25)

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = -h \sum_{q=0}^r \beta_q \left( \frac{F_y}{F_{y'}} \right)_{k+1-q}^* \varepsilon_{k+1-q} + q_k. \quad (26)$$

Diese Fehlergleichung kann genau wie die entsprechende Gleichung (2,3) in [3] weiterbehandelt werden und führt zu denselben Fehlerabschätzungen wie in [3], wenn man die dortige Lipschitzkonstante  $K$  jetzt durch

$$K = \max \left| \frac{F_y}{F_{y'}} \right| \quad (27)$$

ersetzt, wobei sich das Maximum auf einen (konvexen) Bereich im  $(x, y, y')$ -Raum bezieht, der die angenäherte und die exakte Lösung enthält. — Ganz entsprechend findet man übrigens durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Gleichungen (23), daß für die Konvergenz des Iterationsprozesses (22), (23) die Bedingung  $K h a_r < 1$  hinreichend ist, wenn man das Maximum in (27) in einem passenden die Näherungswerte enthaltenden Bereich nimmt.

Auch die in diesem Abschnitt betrachteten Verfahren lassen sich leicht auf Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme solcher Gleichungen verallgemeinern.

4. Verschiedene der geschilderten Methoden wurden an der Differentialgleichung

$$xy^2 y'^3 - y^3 y'^2 + x(x^2 + 1) y' - x^2 y = 0$$

$$y(1) = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y'(1) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(mit der exakten Lösung  $y = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$ ) erprobt.

Insbesondere zeigte sich, daß das Interpolationsverfahren nach 2. und nach 3. etwa den gleichen Zeitaufwand erfordert. I. a. wird die Wahl des Verfahrens von der Form der Differentialgleichung abhängen. Je

nachdem, ob die Funktion  $\frac{F_{y'}}{F_x + y' F_y}$  oder  $\frac{F}{F_{y'}}$  leichter zu berechnen ist, wird man ein Verfahren nach 1. bzw. 2. oder nach 3. nehmen. Bei der Wahl zwischen 1. und 2. wird man i. a. wohl 2. bevorzugen, da der Rechenaufwand für beide Verfahren stets ungefähr gleich ist und man sich bei 2. die Argumente  $x_k$ , bei 1. nur die Parameterwerte  $t_k$  vorgeben kann.

Schrifttum.

- [1] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951.
  - [2] J. Weissinger, Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. Math. Nachr. 8 (1952), S. 193—212.
  - [3] J. Weissinger, Eine Fehlerabschätzung für die Verfahren von Adams und Störmer. Z. angew. Math. Mech. 32 (1952), S. 62—67.
- Hamburg. J. Weissinger.

## Vereinfachte Herleitung der Weissingerschen Zirkulationsgleichung für den schiebenden Tragflügel.

### I. Einleitung.

Die Schwierigkeiten, die sich bei der Aufstellung einer der Prandtl'schen Zirkulationsgleichung entsprechenden Bestimmungsgleichung für schräg angeströmte Tragflügel ergeben, sind bekanntlich in der Singularität begründet, die der Ausdruck für die induzierte Geschwindigkeit am Ort der tragenden Linie besitzt. Während Weissinger<sup>1)</sup> für den schiebenden Flügel diese Singularität berücksichtigt, indem er eine passende Anfahrströmung heranzieht, soll sie hier zur Verbesserung der Übersicht explizit ermittelt und durch eine geeignete ebene Schicht dem Flügelschnitt zugeordneter Wirbel kompensiert werden.

### II. Berechnung der induzierten Geschwindigkeit des schrägen Wirbelbandes.

Die Aufwärtsgeschwindigkeit  $w$  in einem Punkte  $(x, y, z)$ , herrührend von einem in  $x$ -Richtung gelegenen Wirbelband von der Breite  $b$ , welches sich von der tragenden Linie  $x(y)$  ab bis ins positiv Unendliche erstreckt, ist gegeben durch

$$4\pi w(x, y, z) = \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma'(\eta) \frac{\eta - y}{(\eta - y)^2 + z^2} \cdot \left(1 - \frac{\xi(\eta) - x}{\sqrt{(\xi(\eta) - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}\right) d\eta,$$

<sup>1)</sup> J. Weissinger, Der schiebende Tragflügel bei gesunder Strömung. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung 1940.

wenn  $\Gamma'(\eta)$  die Dichte der abschwimmenden Wirbel bedeutet, mit der das Band längs der Breitenkoordinate  $\eta$  belegt ist.  $-\frac{b}{2} \leq \eta \leq \frac{b}{2}$ .

Liegt der Aufpunkt oberhalb der tragenden Linie, so gilt speziell für den schiebenden geraden Flügel wegen  $\xi = \eta \tan \delta$ ,  $x = y \tan \delta$

$$4\pi w = \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma'(\eta) \frac{\eta - y}{(\eta - y)^2 + z^2} \cdot \left(1 - \frac{(\eta - y) \tan \delta}{\sqrt{(\eta - y)^2 (1 + \tan^2 \delta) + z^2}}\right) d\eta \quad (1).$$

Spalten wir im Folgenden von allen mit  $z \rightarrow 0$  endlich bleibenden Ausdrücken ihren Grenzwert ab, so haben wir zunächst mit

$$4\pi w_0 = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\Gamma'(\eta) d\eta}{\eta - y} \quad \dots \quad (2),$$

$$-4\pi(w - w_0) = \sin \delta \cdot$$

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma'(\eta) \frac{(\eta - y)^2 d\eta}{((\eta - y)^2 + z^2) \sqrt{(\eta - y)^2 + z^2 \cos^2 \delta}} + O(z),$$

wobei  $O(z)$  eine Größe kennzeichnen soll, die mit  $z$  gegen Null geht. Weiterhin gilt dann auch

$$-4\pi(w - w_0) = \sin \delta \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\Gamma'(\eta) - \Gamma'(y)}{|\eta - y|} d\eta$$

$$+ \Gamma'(y) \sin \delta \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{(\eta - y)^2 d\eta}{((\eta - y)^2 + z^2) \sqrt{(\eta - y)^2 + z^2 \cos^2 \delta}} + O(z).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$-4\pi w_1 = \sin \delta \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\Gamma'(\eta) - \Gamma'(y)}{|\eta - y|} d\eta \quad (3),$$

so finden wir für den Rest nach elementarer Integration

$$-4\pi(w - w_0 - w_1) = \Gamma'(y) \sin \delta \left[ \ln(\eta - y + \sqrt{(\eta - y)^2 + z^2 \cos^2 \delta}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \sin \delta} \ln \frac{\sqrt{(\eta - y)^2 + z^2 \cos^2 \delta} + (\eta - y) \sin \delta}{\sqrt{(\eta - y)^2 + z^2 \cos^2 \delta} - (\eta - y) \sin \delta} \right] + O(z).$$

Der erste Teil in der Klammer ergibt

$$\ln \left( \frac{\left(\frac{b}{2} - y\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + z^2 \cos^2 \delta}}{-\left(\frac{b}{2} + y\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + z^2 \cos^2 \delta}} \right) \\ = \ln \left[ \frac{\left(\frac{b}{2} - y\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + z^2 \cos^2 \delta}}{z^2 \cos^2 \delta} \right] \\ + \ln \left[ \frac{\left(\frac{b}{2} + y\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + z^2 \cos^2 \delta}}{z^2 \cos^2 \delta} \right]$$

mit  $z \rightarrow 0$  im Zähler

$$\ln \frac{4 \left( \left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 \right)}{z^2 \cos^2 \delta}.$$



Der zweite Teil liefert den Grenzwert

$$\frac{1}{\sin \delta} \ln \frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta}.$$

Insgesamt ergibt sich demnach

$$-4\pi(w - w_0 - w_1) = \Gamma'(y) \sin \delta.$$

$$\cdot \left( \ln \frac{4 \left( \left( \frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)}{z^2 \cos^2 \delta} - \frac{1}{\sin \delta} \ln \frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} \right) + O(z).$$

Setzen wir noch

$$-4\pi w_2 = \Gamma'(y) \sin \delta.$$

$$\cdot \left( \ln \frac{64 \left( \left( \frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)}{l^2(y) \cos^2 \delta} - \frac{1}{\sin \delta} \ln \frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} \right) \quad (4),$$

und

$$-4\pi w_3 = -2\Gamma'(y) \sin \delta \ln \frac{4|z|}{l(y)}, \quad l(y) \text{ vgl. (7) (5),}$$

so wird mit den Abkürzungen (1) bis (5)

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + O(z) \quad \dots \quad (6).$$

### III. Bestimmung der zugehörigen Zirkulation im Flügelschnitt.

Die vom Wirbelband an der tragenden Linie induzierte Geschwindigkeit ist in den Bestandteilen  $w_0$ ,  $w_1$  und  $w_2$  endlich, während  $w_3$  mit  $z \rightarrow 0$  logarithmisch über alle Grenzen wächst. Diese Singularität läßt sich auf folgende Weise berücksichtigen. Denken wir uns den schiefen tragenden Wirbelfaden, wie in Wirklichkeit, über die tragende Fläche ausgebreitet und deren Wirkung an der Stelle  $y$  für  $z \rightarrow 0$  wie in der Prandtl'schen Theorie durch die Wirkung des ebenen Flügelschnitts ersetzt, so läßt sich eine Verteilung ebener gebundener Wirbel über die Tiefe  $l(y)$  angeben, die diese Singularität gerade kompensiert und eine bestimmte Zirkulation  $\Gamma_3$  zur Folge hat.

Da die endlich bleibenden Geschwindigkeiten die Bestimmung der Zirkulation im Prandtl'schen Sinne erlauben, gilt dann die Zirkulationsgleichung

$$\Gamma(y) = \pi l(y) V \left( \alpha(y) + \frac{w_0 + w_1 + w_2}{V} \right) + \Gamma_3(y) \quad (7),$$

wenn  $l(y)$  die Flügeltiefe,  $V$  die Anströmungsgeschwindigkeit und  $\alpha(y)$  den Anstellwinkel an der Stelle  $y$  bedeutet, senkrecht zur tragenden Linie gemessen.

Zur Bestimmung der kompensierenden ebenen Verteilung über die Sehne des Flügelschnitts von der Länge  $l(y)$  gehen wir aus von der Formel

$$2\pi w_e = - \int_0^l \gamma(\xi) \frac{l - \xi}{(l - \xi)^2 + z^2} d\xi \quad \dots \quad (8),$$

die die induzierte Aufwärtsgeschwindigkeit in einem Punkte oberhalb der Hinterkante liefert. Durch Teilintegration findet man, wenn  $\gamma$  endlich bleibt,

$$2\pi w_e = \left( \gamma(\xi) \ln \sqrt{\frac{(l - \xi)^2 + z^2}{\frac{l^2}{4}}} \right)_0^l - \int_0^l \gamma'(\xi) \ln \sqrt{\frac{(l - \xi)^2 + z^2}{\frac{l^2}{4}}} d\xi.$$

Setzen wir

$$\gamma(\xi) = C \varphi \quad \dots \quad (9),$$

wobei die Variable  $\varphi$  eingeführt sein soll durch

$$\xi = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi),$$

so ergibt sich

$$2\pi w_e = C \pi \ln \frac{2|z|}{l} - C \int_0^\pi \ln \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \frac{4z^2}{l^2}} d\varphi$$

und mit  $z \rightarrow 0$  im zweiten Bestandteil

$$2\pi w_e = C \pi \ln \frac{4|z|}{l} \quad \dots \quad (10).$$

Die Geschwindigkeit  $w_3$  kann also durch  $w_e$  aufgehoben werden, wenn gilt

$$C = -\frac{1}{\pi} \Gamma'(y) \sin \delta.$$

Die zugehörige Zirkulation  $\Gamma_3$  ergibt sich dann zu

$$\Gamma_3(y) = \int_0^{l(y)} \gamma(\xi) d\xi = -\Gamma'(y) \frac{l(y)}{2} \sin \delta \quad (11).$$

Damit erhalten wir schließlich die folgende Bestimmungsgleichung für die Zirkulation

$$\begin{aligned} \Gamma(y) = \pi l(y) V \left[ \alpha(y) + \frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\Gamma'(\eta) d\eta}{\eta - y} \right. \\ \left. - \frac{\sin \delta}{4\pi V} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\Gamma'(\eta) - \Gamma'(y) d\eta}{|\eta - y|} \right. \\ \left. - \frac{\Gamma'(y) \sin \delta}{4\pi V} \left( \ln \frac{64 \left( \left( \frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)}{l^2(y) \cos^2 \delta} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sin \delta} \ln \frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} + 2 \right) \right], \end{aligned}$$

die die Weissingersche Zirkulationsgleichung ohne Berücksichtigung der Querströmung darstellt.

Hannover.

K. Jaekel.

### Der wirksame Austrittsquerschnitt bei Zyklonen.

Um für die Auslegung von Zyklonen einen Anhalt über die Größe des beim Austritt sich bildenden Kerns zu gewinnen, soll die gesamte Strömung als isentropische Expansion vom Eintritt bis zum Austritt aufgefaßt werden, so daß nach Crocco eine wirbelfreie Strömung vorliegt; aus dieser Annahme folgen für die azimutale Komponente  $w_\varphi$  und für die axiale Komponente  $w_z$  der Strömungsgeschwindigkeit  $w$  im Austrittsrohr die Beziehungen

$$r w_\varphi \equiv r w \cos \chi = C \quad \dots \quad (1)$$

$$w_z \equiv w \sin \chi = K \quad \dots \quad (2)$$

( $r$ : Abstand von der Rohrachse,  $\chi = \angle(w, df)$   $df$ : Flächenelement eines achsensenkrechten Schnittes des Austrittsrohres); hierbei ist vorausgesetzt, daß im Austrittsquerschnitt in allen Meridianschnitten gleiche Strömungsverhältnisse vorliegen und weiterhin die Änderung der radialen Geschwindigkeitskomponente  $w_r$  in Achsenrichtung vernachlässigbar sei. Ferner werde angenommen, daß infolge Druckausgleiches im Kern der Druck  $p_a$  des Außenraumes herrsche. Die Konstanten  $C$  und  $K$  sind durch die Bedingung des Unveränderlichkeit des Massendurchsatzes und des Dralls bestimmt. Da durch ein Flächenelement  $df = r \cdot dr \cdot d\varphi$  pro Zeiteinheit die Masse ( $n$ : Flächennormale)

$$\rho \bar{w} \cdot n df = \rho K r dr d\varphi$$

strömt ( $\rho$ : Dichte,  $\varphi$ : Azimut), so liefert der Kontinuitätssatz die Gleichung

$$(1 + \epsilon) \dot{m}_0 = 2\pi K \int_0^a \rho r dr \quad \dots \quad (3)$$

$\dot{m}_0$ : die durch die Eintrittsöffnung des Zyklons in der Zeiteinheit strömende Masse,  $\epsilon \dot{m}_0$ : die bei der Verbrennung im Zyklon in der Zeiteinheit erzeugte Gasmasse,  $r_K$ : Kernhalbmesser,  $\alpha$ : Austrittsrohrhalbmesser; da ferner der resultierende Vektor

$$\vec{D} = \int \vec{r} \times d\vec{m} \vec{\omega}$$

des Drehimpulses, welcher durch die Austrittsöffnung in der Zeiteinheit transportiert wird, in Achsenrichtung weist, brauchen bei der Integration nur die axialen Komponenten  $(\vec{r}_i \times \vec{\omega}_i)_z$  des Vektorproduktes berücksichtigt zu werden. Somit wird

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 2\pi K \int_0^a \varrho(r \cos \chi) r dr \\ &= 2\pi K C \int_0^a \varrho r dr = \dot{m}_0 R_0 w_0 \quad \dots (4) \end{aligned}$$

( $R_0$ : Halbmesser bei Eintritt, Zyklon,  $w_0$ : Eintrittsgeschwindigkeit), so daß  $C = \frac{R_0 w_0}{1 + \epsilon}$  wird. Unter Berücksichtigung des Energiesatzes

$$w^2 = w_{max}^2 \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) \quad \dots (5)$$

( $w_{max}$ : Endgeschwindigkeit beim Ausströmen ins Vakuum vom Zustand  $p_{00}$ ,  $\varrho_{00}$ , der im wesentlichen mit dem Eintrittszustand  $p_0$ ,  $\varrho_0$  identisch ist:

$$p_{00} = p_0 + \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{1 + \frac{\Delta T}{T_0}} w_0^2, \quad i_{00} = i_0 + \frac{A}{2g} w_0^2 + c_p \Delta T$$

$i$ : Enthalpie,  $A$ : mechanisches Wärmeäquivalent,  $\Delta T$ : bei Feuerungszyklonen die Temperaturänderung bei konstantem Druck) und der Änderung der Dichte bzw. des Druckes bei isentropischer Expansion kann wegen

$$w^2 = K^2 + C^2/r^2 \quad \dots (6)$$

die Dichte als Funktion von  $r$  ausgedrückt werden. Wird  $K$  und  $C$  nach (3) und (4) in (6) für  $r = r_K$ ,  $w = w_K$  unter Beachtung von (5) eingesetzt, so ergeben elementare Umformungen für den Eintrittsquerschnitt  $F_E$  wegen

$$\dot{m}_0 = F_E w_0 \varrho_0$$

folgenden Ausdruck

$$\frac{F_E}{\pi R_0^2} = \frac{1}{(1 + \epsilon)^3} \frac{\varrho_{00} w_0}{\varrho_0 w_{max}} \frac{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} \cdot I(\xi_1, \xi_2) \quad (7)$$

mit

$$I(\xi_1, \xi_2) = \int_{\xi_1^2}^{\xi_2^2} \left( 1 - \frac{1}{u} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} du \quad \dots (8)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 \left( \frac{p_a}{p_{00}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}} \quad \dots (9)$$

$$\xi_2 = (1 + \epsilon) \frac{a \cdot w_{max}}{R_0 \cdot w_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \quad \dots (10)$$

Die Größe  $\alpha$  stellt die Unbekannte dar, welche durch numerische Rechnung aus (7) zu bestimmen ist. — Für  $\kappa = 1,4$  (Luft) ist  $I$  elementar auswertbar:

$$\begin{aligned} I(1, \xi) &= \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \left\{ \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) + 4 + \xi^2 \right\} \\ &\quad + \frac{5}{2} \lg \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}} \end{aligned}$$

Nach Ermittlung von  $\alpha$  ergibt sich der Kernhalbmesser zu

$$\frac{r_K}{R_0} = \left( \frac{1}{1 + \epsilon} \right) \frac{w_0}{w_{max}} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 \left( \frac{p_a}{p_{00}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}} \quad (11)$$

Die aus (7) und (11) folgende Beziehung

$$1 \leq \alpha^2 < \left( \frac{p_{00}}{p_a} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad \dots (12)$$

zeigt, daß für die numerische Rechnung nur ein kleiner Zahlenbereich zu untersuchen ist. — Für den Durchsatz durch den Zyklon ist der Umstand von Bedeutung, daß mit wachsendem  $\alpha$  die untere Grenze in (8) stark steigt und zusätzlich die obere Grenze schwach fällt, so daß der Wert des Integrals abnimmt; für  $r_K = a$  wird nach (9) und (10) bei

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 = \frac{\left( \frac{p_{00}}{p_a} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1 + \left( \frac{1}{1 + \epsilon} \frac{R_0 w_0}{a w_{max}} \right)^2 \left( \frac{p_{00}}{p_a} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad (13)$$

der Durchsatz zu Null;  $\alpha_0$  liegt unterhalb der oberen Grenze von (12).

Mit steigendem  $r_K$ :  $\alpha$  kann der Kernquerschnitt infolge der bisher vernachlässigten inneren Reibung des Mediums einen zunehmenden Anteil des aufgezogenen Dralls  $\dot{m}_0 R_0 w_0$  übernehmen. Falls in der äußeren Zone des Kerns infolge Impulsaustausches eine axiale Geschwindigkeit auftritt und somit aus Gründen der Kontinuität längs der Rohrachse eine entgegengesetzte Strömung aus dem Außenraum in den Kern vorhanden ist, kann unter der Annahme eines für turbulente Rohrströmung üblichen Potenzgesetzes die axiale Komponente im Kern in der Form

$$w_{zi} = w_{zK} \left( 1 - c_1 \left( 1 - \frac{r}{r_K} \right)^{1/n} \right) \quad \dots (14)$$

geschrieben werden; ferner kann unter der Voraussetzung konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kern

$$w_{\varphi i} = w_{\varphi K} \frac{r}{r_K} \quad \dots (15)$$

gesetzt werden. Soweit diese Ansätze zur Darstellung der Kernströmung anwendbar sind, ergibt sich für den durch den Kern in der Zeiteinheit transportierten Drall  $\dot{D}_i$  nach kurzer Zwischenrechnung unter Beachtung der für  $w_{zK} = w_z(r_K)$  und  $w_{\varphi K} = w_{\varphi}(r_K)$  geltenden Beziehungen (1) und (2)

$$\dot{D}_i = \left( c_2 \frac{1}{1 + \epsilon} \cdot \frac{\pi r_K^2}{F_E} \cdot \frac{w_{max}}{w_0} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \cdot \frac{\varrho_a}{\varrho_0} \right) \dot{m}_0 R_0 w_0 \quad (16)$$

Die Konstanten  $c_{1,2}$  sind hierbei durch die Eulerschen Integrale erster Gattung

$$\begin{aligned} c_1 &= 1/2 B \left( 2, 1 + \frac{1}{n} \right) \\ c_2 &= 1/2 - \frac{B \left( 4, 1 + \frac{1}{n} \right)}{B \left( 2, 1 + \frac{1}{n} \right)} \end{aligned}$$

gegeben; im Falle des 1/7-Gesetzes von v. Kármán wird

$$c_2 = 0,0392.$$

Bei relativ kleinem Kernquerschnitt ist somit der nach (16) berechnete Wert des durch den Kern übertragene Drehimpulses vernachlässigbar.

Berlin-Lichtenberg.

W. Bader.



# BUCHBESPRECHUNGEN

**M. Eßlinger**, *Statische Berechnung von Kesselböden*. VIII + 100 S. m. 21 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952. Springer-Verlag. Preis kart. 10,50 DM.

Verf. hat sich die dankbare Aufgabe gestellt, die Berechnungsverfahren für Kesselböden einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Hierbei ist einerseits eine kritische Sichtung des bisherigen Schrifttums vorgenommen worden, andererseits werden verschiedene Ergänzungen gebracht, die sich auf die Art der Wölbung des Bodens und seine Befestigung, sowie auf Durchbrüche beziehen. Der 1. Abschnitt bringt einen Überblick über die Rechnungsarten; der 2. Abschnitt enthält die Herleitung von Einzelformeln für Boden, Krempe und Mantel (Tabellen und Kurven); der 3. Abschnitt enthält Anwendungsformeln für verschiedene Kesselformen auf Grund der Überlegungen des 1. und 2. Abschnittes. Der 4. Abschnitt bringt Zahlenbeispiele, welche im 5. Abschnitt z. T. mit Messungen von Siebel verglichen werden. Im 6. Abschnitt wird der Spannungsverlauf für die durchgerechneten Beispiele diskutiert. Das Buch schließt eine Lücke innerhalb der Konstruktions- und Berechnungsbücher und wird deshalb in der Praxis gute Aufnahme finden.

Dresden.

H. Neuber.

**Dr. W. Krull** (o. Prof. a. d. Univ. Bonn), *Elementare u. klassische Algebra vom modernen Standpunkt*, Bd. I, 2. Aufl. (Sammlung Götschen, Band 930.) 136 S. Berlin 1952. Verlag Walter de Gruyter u. Co. Preis brosch 2,40 DM.

Es handelt sich um den bemerkenswerten Versuch, mit den Begriffen der modernen Algebra dadurch vertraut zu machen, daß sie in die Darstellung der elementaren und klassischen Algebra eingeführt werden. Dem formalen Rechnen wird von Anfang an der Begriff des Körpers zugrunde gelegt. Das dem Bändchen gesetzte Ziel ist namentlich in den ersten Abschnitten recht gut erreicht.

Ob freilich auch der Anfänger ein durchweg klares Bild erhält, ist bei der gedrängten Darstellung fraglich. Der knappe Raum für den sehr reichen Inhalt läßt manchen Ansatz willkürlich erscheinen. Aus diesem Grunde kann auch der Gruppenbegriff in seiner fundamentalen Bedeutung nicht so heraustreten, wie es wünschenswert wäre.

Die Anlehnung des die höhere Gleichungstheorie behandelnden Abschnittes an die geschichtliche Entwicklung ist ein immanenter Ausgleich des bezeichneten unvermeidlichen Mangels. Dem Leser wird dadurch der Weg gewiesen, mittels der einschlägigen Literatur etwa verbliebene Lücken in der begrifflichen Klarheit zu schließen. Dazu könnte übrigens auch der vorgesehene zweite, Aufgaben enthaltende Band die erforderlichen Anleitungen geben. Erst nach seinem Erscheinen ist ein abschließendes Urteil möglich.

Dresden.

Draeger.

**H. M. Hansen** (Prof. a. d. Univ. von Michigan) und **P. F. Chenea** (assoc. Prof. a. d. Univ. von Michigan), *Mechanics of Vibration*. 417 S. m. 345 Abb. New York und London 1952, J. Wiley and Sons, Chapman a. Hall. Preis 8 \$.

Das Buch entstand aus einem schwingungstechnischen Kursus an der technischen Abteilung der Universität Michigan. Die theoretischen Grundlagen sind nur in knapper, auf die unmittelbare Anwendung hinzielender Form gebracht, um auch Lesern mit geringer mathematischer Vorbildung entgegenzukommen. Dennoch gehen einzelne Teile des Buches zu abstrakteren Formulierungen über, welche

auch für wissenschaftlich geschulte Leser in anregender Weise abgeleitet werden. Nach einführenden Bemerkungen über Definitionen, Schwingungsarten, Dimensionen und Maßeinheiten, sowie kinematischen Überlegungen bei einfachen harmonischen Bewegungen folgen 3 Hauptteile. Der 1. Teil behandelt Schwingungen mit einem Freiheitsgrad: Freie Schwingungen ohne Dämpfung (Ableitung und Lösung der Bewegungsgleichungen für Translation und Rotation, zusammengesetzte Federn, Anwendungen, Energiemethode); erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung (Natur der erzwungenen Schwingung, Ableitung und Lösung der Bewegungsgleichung, Resonanz, Meßinstrumente, erzwungene Pendelschwingung, kritische Drehzahlen); erzwungene Schwingungen mit Dämpfung (Natur der Dämpfung, Systeme mit linearer Dämpfung, Ableitung und Lösung der Bewegungsgleichung, Resonanz, Energiebilanz). Der 2. Teil behandelt Systeme mit mehreren Freiheitsgraden: Klassische Methode (Art der Freiheitsgrade, Ableitung und Lösung der Bewegungsgleichungen für freie Schwingungen, erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung bei 2 Freiheitsgraden, desgleichen mit Dämpfung, Orthogonalität der Hauptschwingungsarten, Schwingungen vieler Freiheitsgrade, Schwingungen von Systemen mit Zwangsbedingungen und die Lagrange'schen Gleichungen, potentielle Energie und Dissipationsfunktion, Anwendung auf ein Zentrifugalpendel, Anwendung auf ein dissipatives System); Bewegungsmethode und Einführung komplexer Variablen (der Vektor und seine komplexe Darstellung, Impedanz, Anwendungen, verzweigte Systeme, Übertragbarkeit, Systeme mit ebener Bewegung, Schwingungen einer federnd abgestützten Plattform); Lösung der allgemeinen Frequenzgleichung (Allgemeines, Verfahren von Holzer, Verfahren von Graeffe). Im 3. Teil werden spezielle Probleme behandelt: Systeme mit kontinuierlicher Massenverteilung (Einführung, Ableitung und Lösung der Bewegungsgleichungen, Schwingungen einer Saite, Längsschwingungen eines Stabes, Drehschwingungen, Biegeschwingungen, Anwendungen der Energiemethode); nicht-harmonische Schwingungen (Natur der nicht-harmonischen Bewegung, freie Schwingungen mit Dämpfung, Wirkung eines zeitlich un stetigen Kraftverlaufes); nicht-lineare Schwingungen (Natur der nicht-linearen Systeme, ungedämpfte freie Schwingungen bei nicht-linearer Federkraft, Bewegung eines Pendels bei großen Amplituden, stückweise lineare Federkraft, nicht-lineare Dämpfung). Es folgen Ausführungen über die Durchrechnung von Aufgaben, die mit den im Textteil aufgeführten Problemen in engem Zusammenhang stehen. Das Buch berührt weitgehend die für die Praxis maßgeblichen Problemstellungen und bringt eine große Zahl mit klaren Skizzen versehener Beispiele, die sich an die verschiedensten Gebiete der technischen Praxis anlehnen und zum besseren Verständnis, sowie zum Selbststudium des Lesers beitragen; daher kann ein guter Erfolg erwartet werden.

Dresden.

H. Neuber.

**L. Locher-Ernst**, *Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus. Bd. I) 88 S. mit 167 Abb. Verlag Birkhäuser. Basel 1952. Preis brosch. 12,50 Schw. Fr.

Die genannte Bandreihe des Baseler Verlags Birkhäuser will einige der schönsten Gebiete der Mathematik in leicht faßlichen und im Umfang mäßigen Überblicken sowohl Fachmathematikern als auch Freunden der Mathematik darbieten. Der vorliegende erste Band dieser Reihe bringt eine bisher fehlende



elementare Einführung in einen modernen und interessanten Zweig der Geometrie. Einer seiner bedeutendsten Vertreter, J. Hjelmslev, nannte ihn „natürliche Geometrie“. Die Entwicklung der ersten Grundlagen dieser rein anschaulichen Geometrie geht in der Hauptsache auf A. Kneser und C. Juel zurück.

Locher-Ernsts Einführung in dieses Gebiet setzt keine besonderen Kenntnisse voraus. Ihr Ziel besteht darin, die den Verlauf ebener Kurven regelnden Gesetze kennen zu lernen und eine Übersicht der einfachsten Kurvenformen zu gewinnen. Die projektiv-topologischen Eigenschaften der ebenen Kurven werden aus dem unmittelbar Evidenten in begrifflicher Strenge entwickelt. Als frei bezeichnet der Verfasser diesen Zweig der Geometrie, weil seine Untersuchungen frei von einem Koordinatensystem geführt werden. Die Grundlage seiner Entwicklungen ist der Begriff der „elementaren stetigen Bewegung“. An die Spitze sind einige einfachste, anschaulich selbstverständliche Aussagen axiomatischen Charakters gestellt, darunter ein Stetigkeitsaxiom. Aus diesen lassen sich weitere einfache Sätze projektiver Natur beweisen. Es wird hierauf definiert, was man unter den Begriffen „elementarer Bogen“, „elementare Kurve“ und „einfacher Bogen“ zu verstehen hat. Der letztere wird, was die bei ihm möglichen Singularitäten und seine allgemeine Struktur anbetrifft, genauer untersucht, worauf die weiteren Begriffe „C-Bogen“, „Eilinie“ und „Spiralbogen“ entwickelt werden können.

Bei der Ableitung allgemeiner Sätze über elementare Kurven erweisen sich manche Eigenschaften, die man für wesentlich algebraischer Natur anzusehen geneigt wäre, als viel allgemeinerer Natur. Der Aufbau der freien Geometrie wird bis zu der Konstruktion der Gebilde dritter Ordnung bzw. Klasse mit Hilfe von Eilinien durchgeführt. Diese Konstruktion ist wie manches andere in dem Werk ein Beitrag des Verfassers zu dem neuen Zweig der Geometrie. Der Vortrag ist bei aller Exaktheit leicht verständlich, wozu die zahlreichen Zeichnungen wesentlich beitragen. Die beigelegten Aufgaben sind geeignet, den Leser zu selbständiger Beschäftigung anzuregen.

Freiburg (Sa.)

W. Schmid.

F. Riegels. Die Strömung um schlanke, fast dreh-symmetrische Körper. (Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung N. 5.) 72 S. mit 12 Abb. u. 4 Tab. Göttingen 1952. Selbstverlag Max-Planck-Institut für Strömungsforschung. Preis brosch. 7,— DM.

Mit der Arbeit von Fuhrmann „Theoretische experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen“ begann im Jahre 1910 eine Reihe von Untersuchungen, welche die Strömung um rotationssymmetrische Körper mit der Methode der Achsbelegung durch Quellen und Senken bei rein axialer Anströmung, bzw. durch Dipole bei Queranströmung behandeln.

Die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung um Rotationskörper beliebiger Gestalt gelingt in der vorliegenden Arbeit verhältnismäßig bequem durch Belegung der Körperoberfläche mit Quellringen, deren Intensitätsverlauf längs der Körperoberfläche aus einer Integralgleichung iterativ bestimmt wird, und zwar entsprechen Quellringe mit konstanter Intensität über den Umfang der axialen Anströmung, solche mit einer bestimmten periodischen der Queranströmung. Begünstigt wird diese Behandlung durch bereits vorliegende Tabellen des Verfassers, welche die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten der genannten Quellringe stark vereinfachen. Die Methode wird zunächst auf das Rotations- und das dreiaxige Ellipsoid angewandt, für die bereits die exakte Lösung vorliegt, und ergibt für alle Anströmungsrichtungen bereits in der ersten Näherung befriedigende Übereinstimmung mit der exakten

Lösung. Weiterhin wird noch ein Körper behandelt, dessen Querschnitte dreieckig mäßig deformiert, in Längsrichtung elliptisch veränderlich sind. Hierbei ergibt sich, daß die Berechnung für beliebig vorgegebene Formen, soweit sie im Rahmen der theoretischen Voraussetzungen bleiben, keine zusätzliche Erschwerung bedeutet. Auch gerade hierdurch ist die Arbeit als ein erheblicher Fortschritt in dem anfänglich genannten Aufgabengebiet zu bezeichnen.

Weilburg.

L. Schiller.

K. Hain, Angewandte Getriebelehre. 408 S. mit 491 Abb. Hannover-Darmstadt 1952. Hermann Schroedel Verlag KG. Preis brosch. 21,50 DM, geb. 24,— DM.

Das Buch gibt die zur Untersuchung vorhandener oder zum Entwurf neuer Getriebe notwendigen, bekannten und durch eigene Untersuchungen des Verfassers ergänzten Verfahren und Methoden an. Es beschränkt sich dabei bewußt auf periodische ebene Getriebe, so daß z. B. die Rädertriebe nicht behandelt werden, dafür aber neben den Kurventrieben besonders ausführlich die Vierzylinderkette (Gelenkviereck) und die  $n$ -Zylinderketten ( $n = 6, 8$  und mehr). Die Darstellung bevorzugt die geometrischen Methoden und sieht oft von den Herleitungen benutzter Formeln oder Beziehungen ab, was für den Lernenden eine gewisse Erschwerung bedeutet. Aber es wird vor allem Wert darauf gelegt, daß der Praktiker die Verfahren findet, die notwendig sind und die er auf Grund der angegebenen Beschreibungen auch anwenden kann. Manche Verfahren werden nur kurz, doch unter Angabe entsprechender Literatur, gestreift. Das ausführliche (doch nicht vollständige) Literaturverzeichnis von 269 Nummern zeugt von dem Fleiß und von der Mühe, die der Verfasser in sein Buch gelegt hat, in ein Buch, das für den Getriebepraktiker von großem Wert sein wird. Ausstattung und Druck des Buches sind gut.

Aachen.

W. Meyer zur Capellen.

Dr. phil. H. v. Sanden (o. Prof. a. d. TH Hannover), Praktische Mathematik. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 44). Zweite, erweiterte Aufl. 120 S. mit 25 Abb. Leipzig 1951. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis kart. 3,80 DM.

Die erste Auflage dieses Buches wurde bereits in dieser Zeitschrift, 29 (1949), S. 191, besprochen. In der vorliegenden Neuauflage wurden zwei Paragraphen, über das Iterationsverfahren und über die Ausgleichung mit Gewichten, hinzugefügt und der Abschnitt über harmonische Analyse und Synthese (unter direktem Bezug auf die Tafeln von Zipperer) erweitert. Außerdem wurden einige Beispiele neu aufgenommen. Bei der Durchsicht ist man immer wieder überrascht von der Fülle der praktischen Rechenerfahrung, die Verf. in das Buch hineingearbeitet hat und die in anderen Büchern meist nicht in dieser Art vermittelt wird. Dem Leser wird nicht nur Aufklärung über sein Problem gegeben, sondern er wird darüber hinaus oft noch auf eine Zahl weiterer Gesichtspunkte hingewiesen, die ihm sonst vielleicht entgangen wären. Nicht nur der Student, sondern gerade auch der schon längere Zeit in der Praxis stehende Ingenieur, der während seiner Ausbildung nichts über praktische Mathematik gehört hat, wird das Buch mit großem Gewinn für seine Arbeit benutzen.

Dresden.

G. Opitz.

Dr.-Ing. W. Meyer zur Capellen, Instrumentelle Mathematik für den Ingenieur. (Fachbücher für Ingenieure.) 383 S. m. 190 Abb. Essen 1952. Verlag W. Giradet. Preis geb. 27,80 DM.

Das vorliegende Werk will den Ingenieur mit den Anwendungsmöglichkeiten der handelsüblichen



mathematischen Instrumente vertraut machen. Deswegen ist das Buch nicht nach den verschiedenen Arten der Instrumente gegliedert, sondern es sind nacheinander ihre Verwendungsmöglichkeiten in den folgenden vier Gebieten, Arithmetik und Algebra (92 S.), Geometrie und Trigonometrie (13 S.), Infinitesimalrechnung (215 S.) und Harmonische Analyse und verwandte Probleme (54 S.) behandelt. Natürlich wird auch der Aufbau und die Theorie der Instrumente wie die Fehlermöglichkeiten bei ihrer Anwendung erläutert. Das Hauptgewicht liegt aber auf der Beschreibung ihres Gebrauchs bei den verschiedensten Problemen, die allen möglichen Gebieten insbesondere der Ingenieurwissenschaften entnommen sind. Dabei ist in manchen Fällen gezeigt, wie dieselbe Aufgabe mit verschiedenen Instrumenten behandelt werden kann. Die Lösungen sind im allgemeinen bis in alle Einzelheiten durchgeführt. Ein Schrifttumsverzeichnis, das in der Hauptsache die Anwendungen berücksichtigt und ein alphabetisches Sachverzeichnis schließen das Buch. Offenbar hat der Verfasser eine sehr große Arbeit an das Buch gewendet. Schon allein die Sammlung der zahlreichen schönen Beispiele und ihre Bearbeitung wird viel Zeit gekostet haben. So ist aber auch ein Buch entstanden, aus dem sich der Ingenieur in vielen Fällen Rat holen kann.

Dresden.

Willers.

**Technische Hausmitteilungen des Nordwestdeutschen Rundfunks.** Sonderheft: Unterlagen für UKW-Netzplanungen. 44 S. mit 39 Abb. Hamburg 1952. H. H. Nölke Verlag. Preis brosch. 6,50 DM.

Das Heft enthält drei Aufsätze. In den beiden ersten wird über amerikanische Arbeiten und über deren Anwendung bei den westdeutschen Planungen auf dem UKW-Rundfunk- und Fernsehgebiet berichtet. Die dritte führt den mathematisch wenig geschulten Leser in die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen des in den ersten Arbeiten behandelten Stoffes ein.

Dresden.

Willers.

**G. Tintner** (Prof. am Iowa State College of Agriculture and Mechanic Arts), *Econometrics*. XIII + 370 S. New York 1952. John Wiley & Sons. Preis 5,75 \$.

Das Buch führt den Leser in einen Zweig der Wirtschaftswissenschaft ein, der in Deutschland erst in jüngster Zeit Beachtung gefunden hat. Die Ökonometrie nimmt eine Mittelstellung zwischen statistischer und mathematischer Ökonomie ein und sucht durch Anwendung moderner statistischer Methoden auf theoretische Modelle quantitative Resultate zu erzielen und die Richtigkeit ökonomischer Theorien nachzuweisen. Verf. betont den rein feststellenden Charakter dieser Vorgehensweise; er ist sich der Grenzen (Widerspruch zwischen Modell und Wirklichkeit) und Mängel (Fehlen der für die statistischen Schlüsse nötigen Voraussetzungen) der Methode voll bewußt und schildert die dadurch auftretenden Schwierigkeiten in lebendiger Weise. Es spricht mehr für den Autor als für den dargestellten Gegenstand, wenn man am Schluß fast jedes der zahlreichen Beispiele Wendungen wie „das Ergebnis muß mit gebührender Vorsicht gedeutet werden“ oder „diese Ergebnisse sind wiederum von zweifelhafter Gültigkeit“ findet; die kritische Einstellung des Verf. tritt z. B. auch darin zutage, daß er bezweifelt, daß eine rein zahlenmäßige statistische Erhebung möglich ist ohne eine zugrunde liegende ökonomische Konzeption oder Theorie (— die freilich nicht formuliert zu sein braucht —), oder daß die Ökonometrie wesentlich zur Erforschung von Entwicklungsvorgängen beitragen kann. Trotzdem steht für den Verf. die praktische Bedeutung der Ökonometrie — von der „laissez-faire economy“ bis zur zentral geplanten Wirtschaft — außer Frage.

Den Leser dieser Zeitschrift wird vor allem interessieren, welche mathematischen Hilfsmittel der Ökonometrie als Werkzeug dienen:

Es handelt sich einmal im wesentlichen um die Herausarbeitung linearer Regressionen zwischen mehreren Veränderlichen und den Nachweis der Signifikanz der Regressionskoeffizienten. Die abgeleiteten Beziehungen werden als Angebots-, Nachfrage-, Produktionsfunktionen usw. gedeutet, wobei die Deutung eine weitere Problematik mit sich bringt. Breiten Raum nehmen in diesem Zusammenhang die „gewogene“ Regression und die „Identifikation“ von Gleichungen ein, zwei Probleme, die speziell für die Ökonometrie von Bedeutung sind, da dort die Möglichkeit zu Experimenten fehlt. Außerdem werden noch die Diskriminanz-Analyse und verwandte Fragen behandelt.

Ein zweites großes Gebiet ist die Untersuchung von Zeitreihen, also Trendberechnung (wobei die logistische Kurve immer noch eine Rolle zu spielen scheint), Abspaltung von oszillatorischen und periodischen Bestandteilen, Autokorrelation, Korrelogrammanalyse usw. Besondere Bedeutung mißt Verf. den stochastischen Differenzgleichungen bei, mit deren Hilfe er sämtliche bei Zeitreihen auftretenden Phänomene einheitlich zu erfassen hofft.

In einem Anhang werden die Elemente der Matrizen- und Determinantentheorie und entsprechende Rechenmethoden (lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte) gebracht. An Voraussetzungen wird vom Leser die Kenntnis ökonomischer Theorien und der Grundtatsachen der Statistik verlangt.

Das sonst sehr breit geschriebene Buch verzichtet auf Beweise und gibt dafür jeweils die Originalliteratur an. Das Namenverzeichnis geht über neun Spalten und legt Zeugnis ab von dem großen Fleiß, mit dem das umfangreiche Material zusammengetragen wurde. So ist ein Buch entstanden, das einmal einen Überblick über das bisher Erreichte gibt, zum anderen aber viele Fragestellungen aufzeigt, die bisher noch unerledigt sind — vor allem bei den Prüfmethode für kurze Zeitreihen —, und damit für die künftige Forschung richtungweisend ist, wobei die zu erwartenden Ergebnisse natürlich nicht allein der Ökonometrie zugute kommen werden.

Dresden.

G. Opitz.

**Dr. L. Vietoris** (o. Prof. a. d. Univ. Innsbruck) u. **Dr. G. Lochs**, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*. 415 S. mit 159 Abb. Innsbruck 1951. Universitätsverlag Wagner. Preis geb. S 138,—, DM 30,—.

Bei der Abfassung des Werkes, das aus Vorlesungen an der Technischen Hochschule Wien und der Universität Innsbruck entstanden ist, haben sich die Verff. von folgenden Grundsätzen leiten lassen: „1. Der Leser soll mit nichts Unnötigem belastet werden. 2. Auf Klarheit der Begriffe ist das größte Gewicht zu legen. 3. Verständlichkeit ist wichtiger als Kürze. 4. Beweise sind die beste Einübung der Begriffe. 5. Unrichtige Gedankengänge können nicht verstanden werden; daher darf nirgends versucht werden, dem Leser durch Aufnahme von Unrichtigkeiten das Verständnis scheinbar zu erleichtern.“ — Man darf sagen, daß die konsequente Einhaltung dieser Grundsätze ein Lehrbuch geschaffen hat, das in seiner geschickten Stoffauswahl und seinem methodischen Aufbau dem Studenten wertvolle Hilfe beim Durcharbeiten seiner Vorlesungen geben wird und auch zum Selbststudium vortrefflich geeignet ist.

Der Inhalt entspricht etwa dem Stoff, der an einer TH. in den Vorlesungen: Höhere Mathematik I und II vorgetragen zu werden pflegt, vertieft durch eine gründliche Einführung der analytischen Grundbegriffe im Reellen und im Komplexen; auf eine ausführliche Erörterung des Zahlbegriffes, insbes. der Irrationalzahlen wird verzichtet. Im Einzelnen sei als bemerkens-



wert hervorgehoben, daß der Differentialquotient und das Integral nahezu parallel entwickelt werden, was in mancher Hinsicht den Aufbau der Analysis erleichtert. Es sei z. B. auf den natürlichen Logarithmus, der als bestimmtes Integral eingeführt wird, und (als dessen Umkehrung) die Exponentialfunktion, ferner auf die Herleitung der Taylorschen Formel hingewiesen.

**Inhaltsübersicht:** Grundbegriffe und vorbereitende Darlegungen. — Die Ableitung oder der Differentialquotient. — Wichtige Begriffe und Hilfsätze. — Das Integral. — Geometrische Anwendungen. Winkelfunktionen. — Der Taylorsche Satz. — Unbestimmte Formen. — Numerische Methoden. — Einiges aus der Algebra. — Integration der rationalen und verwandter Funktionen. — Analysis im Komplexen. — Das Wallissche Produkt und die Stirtingsche Formel. — Einiges aus der analytischen Geometrie des Raumes (u. a. Determinanten und Vektoren). — Raumkurven. — Funktionen mehrerer Veränderlicher. — Implizite Funktionen. — Mehrere Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Dresden.

Maruhn.

Review of Electronic Digital Computers,  
Joint AIEE — IRE Computer Conference. 114 S.

m. 100 Abb. New York 1952. American Institute of Electrical Engineers. Preis 3,50 \$.

Das Heft berichtet über eine vom American Institute of Electrical Engineers und dem Institute of Radio Engineers im Dezember 51 gemeinsam in Philadelphia abgehaltene Tagung über Rechenautomaten, die den Zweck hatte, Richtlinien für ihre Weiterentwicklung zu gewinnen. In 19 Vortragsberichten wird eingehend die Erfahrung dargelegt, die bei Entwurf, Einrichtung und Gebrauch von 10 großen elektronischen Maschinen verschiedener Bauart gewonnen wurde, teils handelt es sich dabei um Parallel- teils um Serienmaschinen. Als Speicher wurden in der Hauptsache Ultraschallwellen-, Magnettrommel- oder Kathodenstrahlröhrenspeicher verwendet, wobei letztere sowohl das Strich-Punkt-System, wie das System der Fokussierung-Defokussierung benutzten. Dabei kamen sowohl der Erbauer wie die Benutzer zu Wort. In dem letzten Aufsatz, der die gegenwärtige und künftige Entwicklung der Rechenautomaten behandelt, wird die Ansicht ausgesprochen, daß man erst am Anfang der Entwicklung stehe. Das Heft gibt eine ausgezeichnete, mit Bildern und schematischen Zeichnungen reich ausgestattete Übersicht über den Stand der Entwicklung Ende des Jahres 1951.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

## EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

**L. Bieberbach** (ehem. o. Prof. d. Univers. Berlin), Theorie der geometrischen Konstruktionen (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathem. Reihe Band 13.) 102 S. m. 102 Abb. Basel 1952. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 15,60 Fr. geb. 18,70 Fr.

**T. van Langendonck**, Funções ortogonais na resolução de problemas da teoria da elasticidade, Tomo 1, Generalidades e Torção. 69 S. mit 28 Abb. Sao Paulo 1952.

**Dr. Bruno Eck**, Ventilatoren. Entwurf und Betrieb der Schleuder- und Schraubengebläse. Zweite verbesserte und erweiterte Auflage. XI + 304 S. mit 344 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1952. Springer-Verlag. Preis geb. 36,— DM.

**Dr. Hans Reichardt**, Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz. VDI-Forschungsheft 414. Zweite Auflage. 30 S. mit 18 Abb. Düsseldorf 1951. Deutscher Ingenieur-Verlag G. m. b. H. Preis 12,50 DM.

**Dr. R. M. E. Badrawy**, Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik a. d. Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret. No. 19) 90 S. mit 71 Abb. Zürich 1952. Verlag Leemann.

**O. Haupt** (o. Prof. a. d. Univ. Erlangen), Einführung in die Algebra. Teil I. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik,

Reihe A, Band 5, Teil 1). Zweite Auflage. XVIII + 370 S. Leipzig 1952. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. Preis geb. 23,— DM.

**Henry de Wolf Smyth**, Atom-Energie und ihre Verwertung im Kriege, übersetzt und erläutert von Prof. Dr. Friedrich Dessauer. 352 S. Basel 1947. Ernst Reinhardt Verlag. Preis kart. 11,15 DM., geb. 14,50 DM.

**Hermes-Scholz**, Mathematische Logik. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band I, Heft 1, Teil I.) 2. völlig neubearbeitete Aufl. 82 S. Leipzig 1952. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geh. 8,20 DM.

**Dr. K. H. Weise** (o. Prof. a. d. Univ. Kiel), Vom mathematischen Denken. (Veröffentlichungen der Schleswig-Holsteinischen Universitäts-gesellsch. Neue Folge Nr. 2.) 30 S. Kiel 1952. Verlag Ferd. Hirt. Preis geh. 1,20 DM.

**M. A. N. Forschungsheft 1952 1. Halbjahr**, herausgeg. von der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg. 112 S. mit vielen Abbildungen. Augsburg-Nürnberg 1952. Preis geh. 10,— DM.

**Dr. Fr. v. Krbek** (Prof. a. d. Univ. Greifswald), Eingefangenes Unendlich. Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik. VI + 331 S. mit 128 Abb. Leipzig 1952. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. Preis geb. 22,— DM.

**Dr. W. Lietzmann** (Prof. a. d. Univ. Göttingen), Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie. 220 S. mit 157 Abb. und 1 Tafel. München 1952. Verlag R. Oldenbourg. Preis brosch. 19,50 DM.



## NACHRICHTEN

Paul Felix Neményi

June 5, 1895 (Budapest) — March 1, 1952 (Washington, D. C.).

Dr. Ing. habil. Neményi was Head of the Theoretical Mechanics Section at the U. S. Naval Research Laboratory. During a life of travel and change in much of Europe and America he had devoted his major effort to pure mechanics. Among his discoveries in elasticity, published in this Zeitschrift, are a general duality theorem (9, 488; 10, 383) and a beautiful analogy with plane irrotational flow (12, 364): the latter states that given any plane isometric net, there exists a five parameter family of stress systems for which it is the net of stress trajectories. He reduced the entire theory of extensional stresses in thin shells to the single equation  $u''/u_n + (n^2 - 1)f''/f = 0$  (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 29, 159 (1943)), enabling the exact solution for many shell shapes subject to unsymmetrical load and support. A strong exponent of inverse and semi-inverse methods, in collaboration with R. Prim he discovered many exact rotational and three-dimensional solutions of the equations of gas dynamics. He was an expert in hydrology, fishways, and the morphology of rivers. His numerous expository works are of unusual value for their organization and scope (e.g. this Zeitschrift 11, (1921) S. 59 u. S. 450 Wasserbauliche Strömungslehre (Barth, Leipzig 1933, Adv. Appl. Mech. 2, 123 (1951)). Toward the end of his life, many of his ideas were worked out by his pupils.

Bloomington, Indiana.

C. Truesdell.

**Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in München vom 4. bis 8. September 1952.**

Die Tagung war mit rund 150 Teilnehmern, unter denen sich auch eine Reihe namhafter ausländischer Gäste befand, gut besucht. Es wurden rund 50 Vorträge gehalten, darunter die folgenden Hauptvorträge von dreißig bis sechzig Minuten Dauer:

Hofmann - Ichenhausen: Mathematisches aus früheren Tagen der altbayerischen Hochschulen.

Kneser - Tübingen: Amerikanische Arbeiten zur mathematischen Wirtschaftslehre und Soziologie.

Heinhold - München: Die Behandlung mathematischer Probleme mit Hilfe moderner Rechengерäte.

Witt - Hamburg: Der Begriff des Filters als verallgemeinerte Folge.

Rinow - Greifswald: Bericht über die innere Flächentheorie von A. D. Alexandrov.

Godeмент - Nancy: Aus der Arbeit des Bourbaki-Kreises.

Die übrigen Vorträge behandelten Fragen aus folgenden Gebieten: Algebra, Gruppentheorie, Zahlen-

theorie, Mengenlehre, Limitierungstheorie, Komplexe Funktionentheorie, Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen mit Rand- und Eigenwertproblemen, Geometrie einschließlich Differentialgeometrie und Topologie sowie andere Einzelfragen.

Ein Nachmittag war der Erörterung von Fragen des Mathematischen Unterrichts gewidmet. [Dabei sprachen:

Behnke - Münster: Zur Neugründung der IMUK. Die Verantwortlichkeit der DMV für die Gestaltung des mathematischen Schulunterrichts.

Cramer - Kempfenhausen: Die Aufgabe der Mathematik im Gymnasialunterricht und die Idee des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums.

Mönkemeier - Braunschweig: Die Lage der Höheren Schule in Niedersachsen mit Ausblicken auf einige Nachbarländer.

Heinrich - München: Die Lage des Mathematikunterrichts in Bayern.

Lösch.

**Kolloquium über programmgesteuerte Rechengерäte und Integrieranlagen in der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule in Aachen am 22. Juli 1952.**

Diese Tagung, die erste ihrer Art in Deutschland, war von etwa 200 Personen besucht, darunter zahlreichen Gästen aus Industrie und Technik.

Dr. habil. H. Bückner, Minden berichtete über den von ihm konstruierten z. Zt. in Entwicklung befindlichen „Integromat“. Prof. Dr. A. Walther, Darmstadt sprach über Rechentechnik in Darmstadt — vorhandene Geräte, Ergebnisse und Pläne. Dr. F. J. Weyl, Experte der US-Navy, hielt einen Vortrag über die Entwicklung der Rechenautomaten in den Vereinigten Staaten. Prof. Dr. L. Biermann, Göttingen schilderte die Entwicklung elektronischer Rechenautomaten in Göttingen, wo, gemessen an den im Vergleich zu den USA zur Verfügung stehenden geringen Mitteln, Erstaunliches geleistet wurde. Dipl.-Ing. K. Zuse, Neunkirchen gab neben einer Schilderung der historischen Entwicklung eine Übersicht über die z. Z. bei der Firma Zuse K. G. laufenden Entwicklungsarbeiten.

Aachen.

H. Cremer.

Die nächste Tagung der Gesellschaft für angew. Mathematik und Mechanik findet in der dritten Woche nach Ostern, vom 21.—25. April 1953, in Aachen statt. (Am 21. April: Sitzung des Vorstandsrates und Begrüßungsabend.) — Die örtliche Tagungsleitung hat Herr Prof. Dr. Schultz-Grunow übernommen.

## ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

**Zu Hsien Chih Liu: Über die Entstehung von Ringwellen an einer Flüssigkeitsoberfläche durch unter dieser gelegene, kugelige, periodische Quellsysteme.** Z. angew. Math. Mech. 32 (1952), S. 211—226.

Das vom Verfasser behandelte Problem ist schon 1922 von Lamb gelöst worden (Proc. London Mathematical Society, Second Series, Vol. 21, 1923); kompliziertere Quell-Systeme hat Havelock untersucht (Phil. Mag. 1942). Nach Abfassung der vor-

liegenden Arbeit (1945) sind dann zahlreiche weitergehende Untersuchungen gemacht worden. Gegenüber der Lambschen Darstellungsweise ist die vom Verfasser gegebene Ableitung und Art der Diskussion etwas kompliziert; die Ergebnisse der letzteren gehen jedoch hinsichtlich der Welleninformation wesentlich über das bisher Bekannte hinaus. Insofern hat die Arbeit ihren Wert. Es ist jedoch erstaunlich, daß dem Verfasser die Literatur unbekannt geblieben ist.

Hamburg.

G. Weinblum.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher Sammelnnummer: 42 55 71. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/33/1/2. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1207 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Satz und Druck: Druckerei „Thomas Müntzer“ Werk Langensalza (57 275 4022) (1). Printed in Germany.